

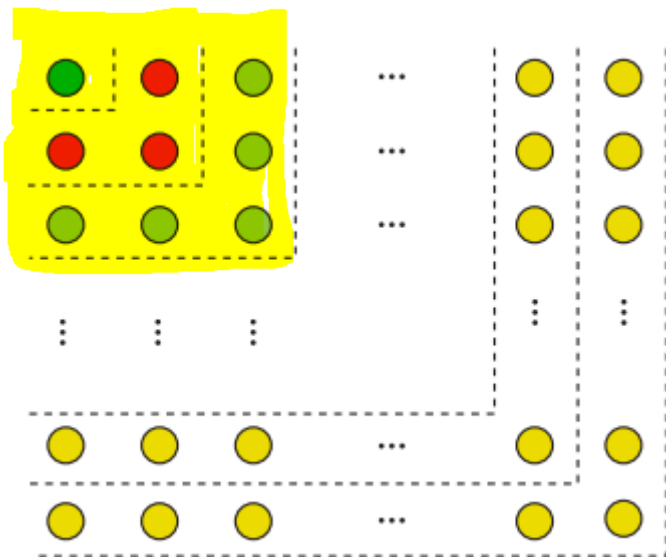


حل تمرینات

حسابان (۱)

رشته ریاضی و فیزیک

(با مراجعه به سایت www.afsharacademy.ir می توانید فیلم حل تمرینات را نیز مشاهده کنید)



الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$a_1 \quad \begin{matrix} d \\ \textcircled{+2} \\ \textcircled{1} \end{matrix} \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2} (1 + 2n - 1) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟

$$\underbrace{102}_{a_1} + 108 + \dots + \underbrace{996}_{a_n} = \frac{1050}{2} (102 + 996)$$
$$= 525 \times 1098 = 576450$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{996 - 102}{6} + 1 = 150$$

۳ در دنباله حسابی ...، ۱۱، ۸، ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟
 $a_1 = 8 \quad d = 3$

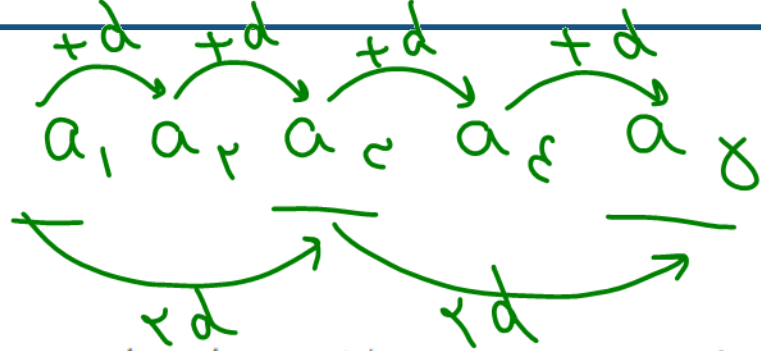
$$S_n > 493$$

$$\frac{n}{2} \left(\underbrace{2 \times 8}_{2n+7} + \overbrace{(n-1) \times 3}^{3n-3} \right) = 493 \xrightarrow{\times 2} n(2n+7) = 986 \rightarrow \underbrace{2n^2}_a + \underbrace{7n}_b - \underbrace{986}_c = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-986) = 49 + 11832 = 11881$$

$$n = \frac{-7 \pm 109}{4} \begin{cases} \text{IV} \\ \text{IV} \end{cases} \rightarrow n = 18$$

~~IV = 19, 3 و 5 و 6~~



حل تمرینات صفحه ۶ کتاب مسابان

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد.

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} &= 135 \\ a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{18} &= 150 \end{aligned} \right\}$$

جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.
 $1 \cdot a_1 + 9 \cdot \frac{13}{17} = 135 \rightarrow 1 \cdot a_1 + 135 = 135$
 $1 \cdot a_1 = 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} (2a_1 + (1-1)2d) &= 135 \rightarrow 1 \cdot a_1 + 1 \cdot d = 135 \\ \frac{1}{2} (2a_2 + (1-1)2d) &= 150 \rightarrow 1 \cdot a_2 + 1 \cdot d = 150 \end{aligned} \right. \ominus$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot a_2 - 1 \cdot a_1 &= 15 \\ 1 \cdot \underbrace{(a_2 - a_1)}_d &= 15 \rightarrow d = \frac{15}{1} = 15 \end{aligned}$$

$a_1 = 0$



$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

حل تمرینات صفحه ۶ کتاب مسابان ۱

۵ جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

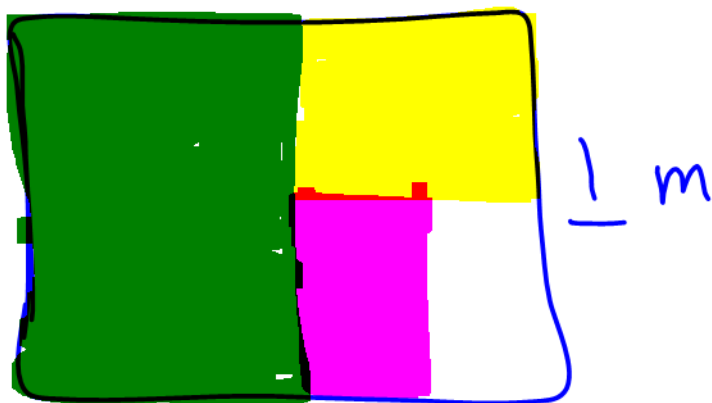
$$S_n = 255$$

$$\underbrace{1, 2, 4, 8, \dots}_{a_1, q=2}$$

$$\frac{1(2^n - 1)}{\cancel{2-1}} = 255 \rightarrow 2^n - 1 = 255$$

$$2^n = 256 = 2^8 \rightarrow n = 8$$

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{99}{100} \times 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$$

$$n = 7$$

~~$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)$$~~

~~$$\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}$$~~

$$= \frac{99}{100}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 = \frac{99}{100}$$

$$\frac{1}{100} = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

۷ برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n :

$x^a \quad x^a$
↪ ↪

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = a \end{cases} \rightarrow$$

$$S_n = \frac{1 \times (a^n - 1)}{a - 1} \rightarrow \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

$$\frac{1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}}{1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$



$\alpha, \beta \rightarrow$ جواب $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \times \beta = 0$
 $x^2 - \sum x + P = 0$

حل تمرینات صفحه ۱۴ - ۱۵ کتاب مسابان ۱

۱ معادله درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. $x^2 - 1x + \frac{2}{9} = 0$ $\rightarrow \sum = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟) $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$\alpha = 2\beta$

$\sum = \alpha + \beta = 2\beta + \beta = 3\beta$

$P = \alpha \times \beta = 2\beta \times \beta = 2\beta^2$

$x^2 - 3\beta x + 2\beta^2 = 0$

$\beta = 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\beta = 2 \rightarrow x^2 - 4x + 8 = 0$



رایس $[k]$ $\rightarrow y = a(x-h)^2 + k$

صفر تابع $\alpha, \beta \rightarrow y = a(x-\alpha)(x-\beta)$

حل تمرینات صفحه ۱۴ - ۱۵ کتاب مسابان۱

۲ در هر یک از شکل های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و

$x = 1, -3$

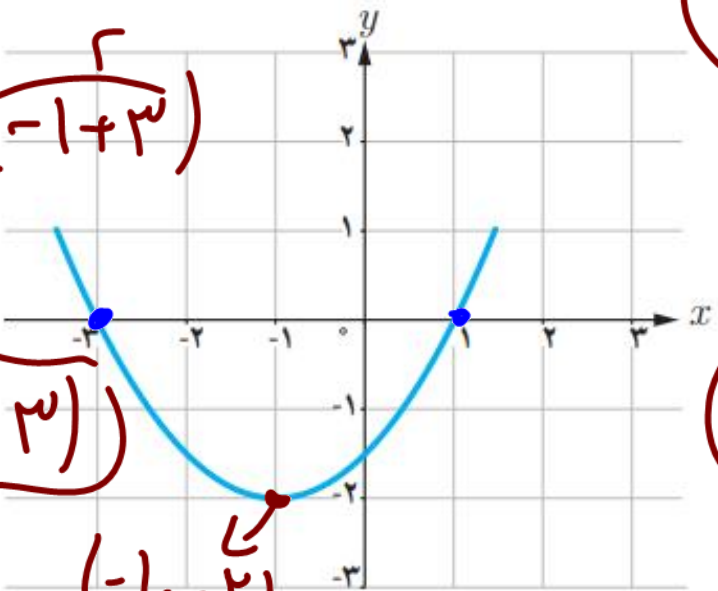
$y = a(x-1)(x-(-3))$

ضابطه آن را مشخص کنید.
 $-2 = a(0-2)^2 \rightarrow a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

صفر تابع

$-2 = a(-1-1)(-1+3)$

$a = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$



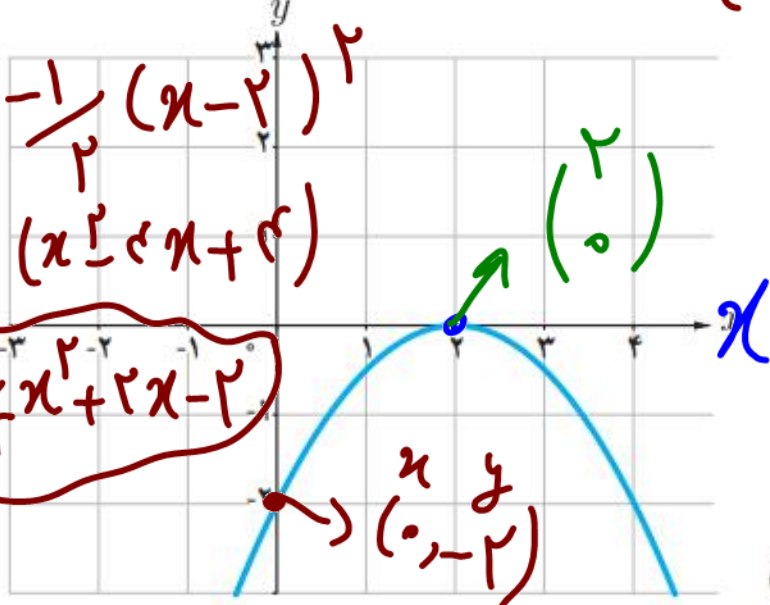
$y = \frac{1}{2}(x-1)(x+3)$

$= \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3)$

$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2$

$y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4)$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$



$x = 2$
صفر



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\min \leq \max \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

حل تمرینات صفحه ۱۶ - ۱۵ کتاب مسابان ۱

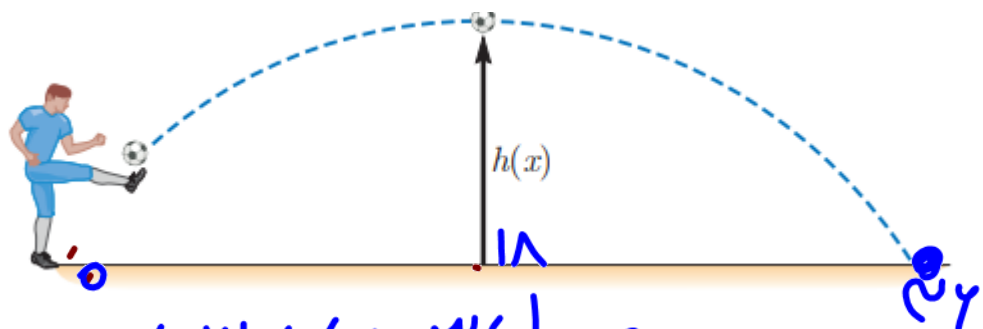
۳ یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.

در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطه $h(x) = -0.03x(x-36)$ مدل‌سازی کنیم

که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است (x بر حسب متر است)

الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.



$$-0.03x(x-36) = 0$$

$$\begin{cases} -0.03x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 36 = 0 \rightarrow x = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 36 \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{-0.03}{a}x^2 + \frac{11.08}{b}x$$

$$x = \frac{-11.08}{-0.06} = 18 \rightarrow h(18) =$$

$$h(18) = -0.03(18)^2 + 11.08 \times 18 = -9.72 + 19.944 = 9.72$$

9,72

الف) $f(x) = x^3 - 4x$

$$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

ب) $g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x = 0$

$$x(2x^2 + x + 3) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \end{array} \right. \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + x + 3 = 0 \quad \Delta = 1 - 24 = -23 \end{array} \right.$$

معادله جواب ندارد

۴. صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

پ) $h(x) = x^2 + 3x + 5$

$$(x^2)^2 + 3x^2 + 5 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} \underbrace{1}_{a} t^2 + \underbrace{3}_{b} t + \underbrace{5}_{c} = 0$$

$$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$$

معادله جواب ندارد

۵ معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = t \rightarrow \underbrace{1}_{a} t^2 - \underbrace{3}_{b} t - \underbrace{4}_{c} = 0$$

$$a + c = b \rightarrow$$

$$\begin{cases} t = -1 \rightarrow x^2 = -1 \quad \times \\ t = -\frac{c}{a} = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = t$$

$$\underbrace{1}_{a} t^2 - \underbrace{7}_{b} t + \underbrace{6}_{c} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{c}{a} = 6 \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = \frac{3}{1} \rightarrow x^2 = 9$$

$$a + b + c = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{3} = \frac{1}{1} \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{پ) } (4-x^2)^2 - (4-x^2) = 12$$

$$\underbrace{4-x^2=t} \rightarrow \underbrace{t^2}_{+} - \underbrace{1t}_{-} - 12 = 0$$

$$(t-4)(t+3) = 0$$

$$\begin{cases} t-4=0 \rightarrow t=4 \\ t+3=0 \rightarrow t=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-x^2=4 \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0 \\ 4-x^2=-3 \rightarrow x^2=7 \rightarrow x=\pm\sqrt{7} \end{cases}$$

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

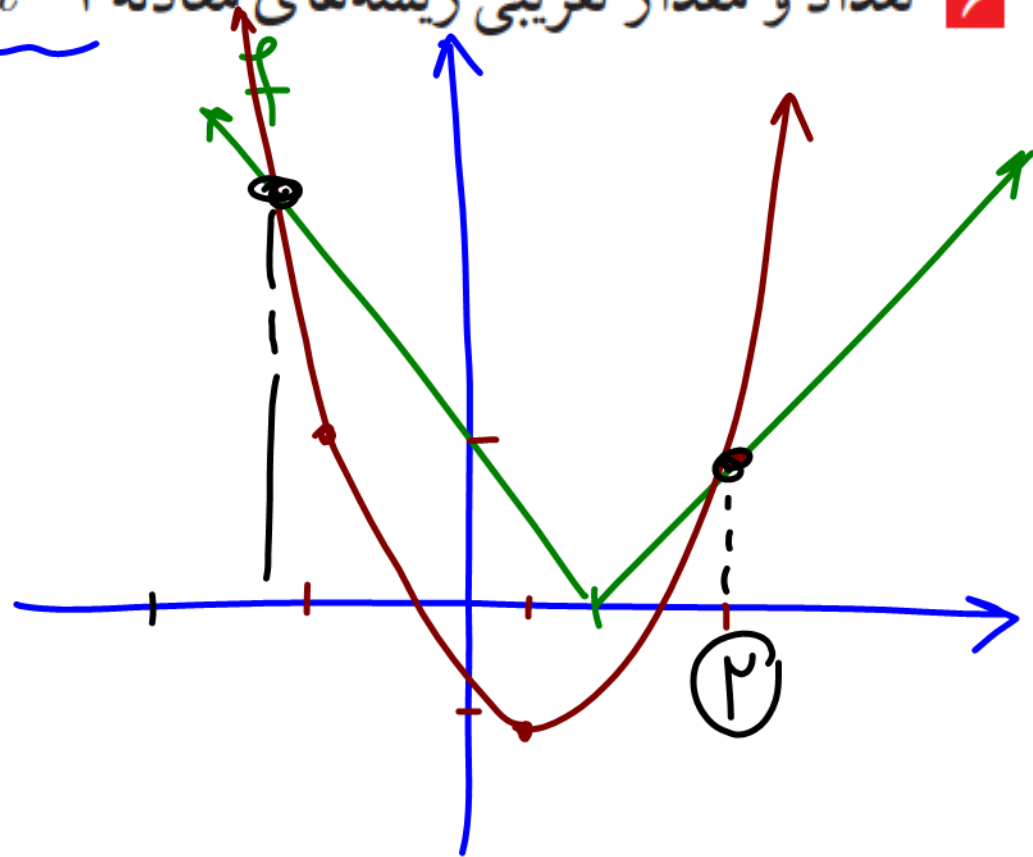
$$f(x) = |x-1|$$

$$g(x) = |x|^2 - |x| - 1$$

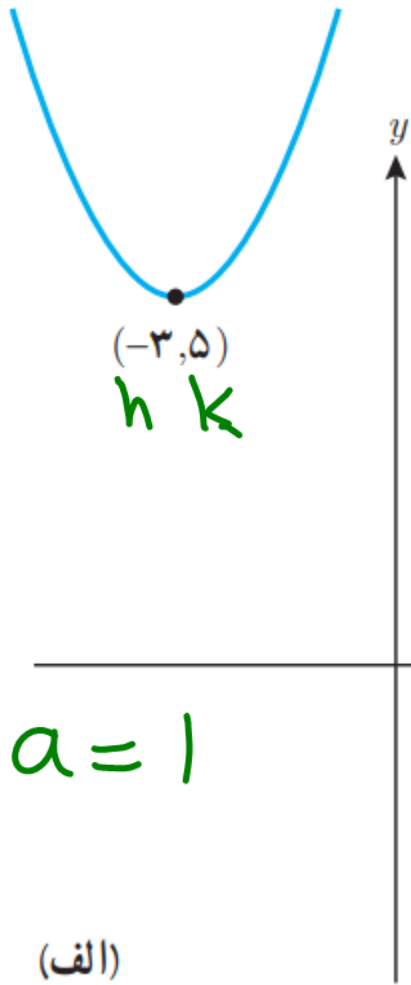
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{5}{4}$$



حل تمرینات صفحه ۱۶ - ۱۵ کتاب مسابان ۱



۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a|=1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.

$a=1$

(الف)

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y = 1(x - (-3))^2 + 5$$

$$y = x^2 + 6x + 9 + 5$$

$$y = x^2 + 6x + 14$$

صفر ندارد



$$y = 1(x - (-2))^2 + 2 = -(x+2)^2 + 2$$

$$= -(x^2 + 4x + 4) + 2$$

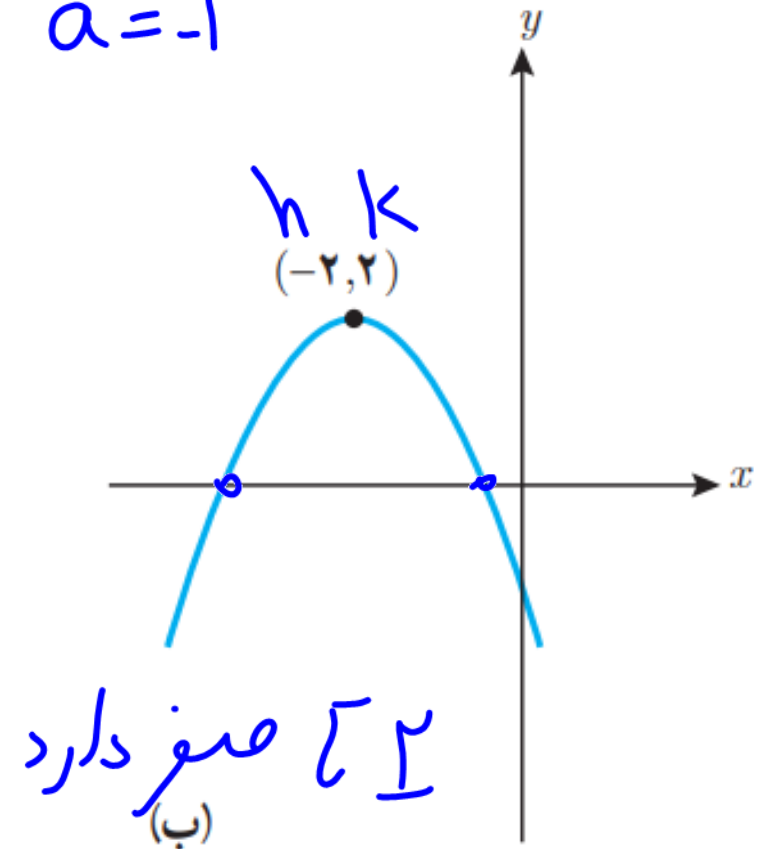
$$= -x^2 - 4x - 4 + 2$$

$$y = \underbrace{-1}_a x^2 + \underbrace{-4}_b x + \underbrace{-2}_c = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(-1)(-2) = 16 - 8 = 8$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{-2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = \boxed{-2 \pm \sqrt{2}}$$

$$a = -1$$



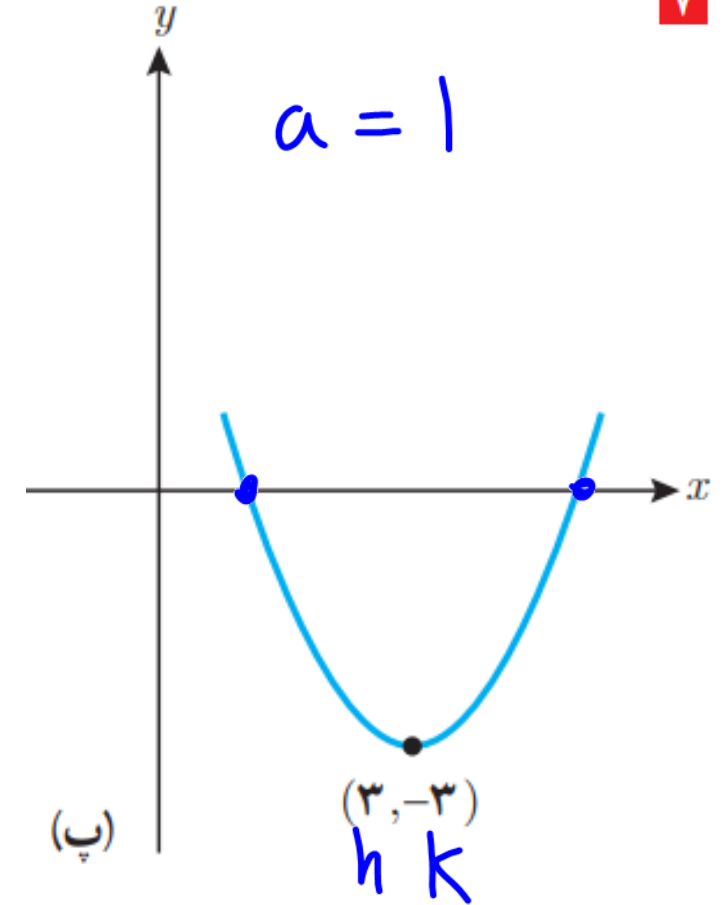
$$y = 1(x - 3)^2 - 3 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 3$$

$$= x^2 - 6x + 9 - 3$$

$$y = x^2 - 6x + 6$$

$$\begin{cases} x - 3 = \sqrt{3} \\ x - 3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \\ x = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$$



$$y = -1(x - (-2))^2 - 1$$

$$= -(x + 2)^2 - 1$$

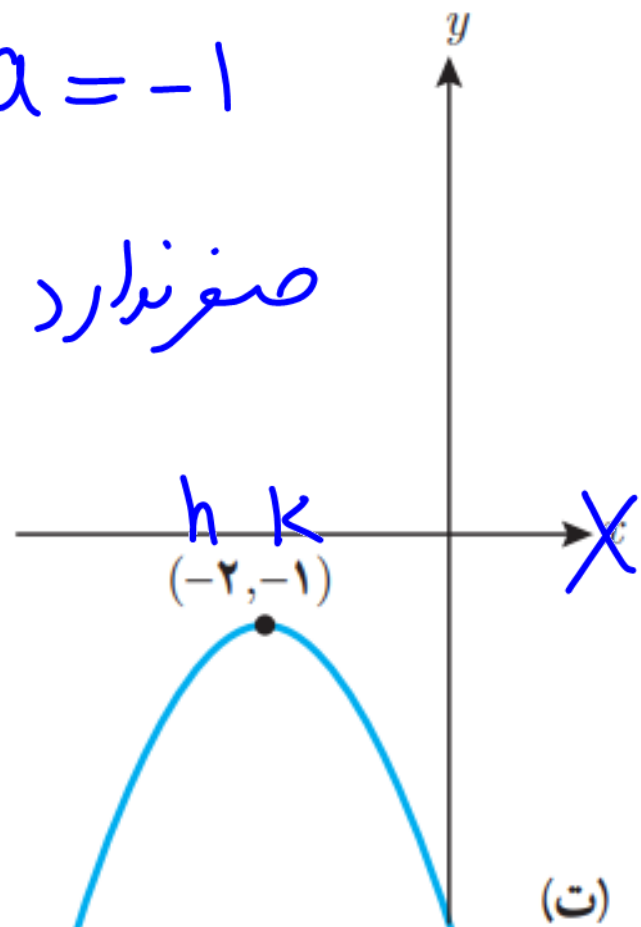
$$= -(x^2 + 4x + 4) - 1$$

$$= -x^2 - 4x - 4 - 1$$

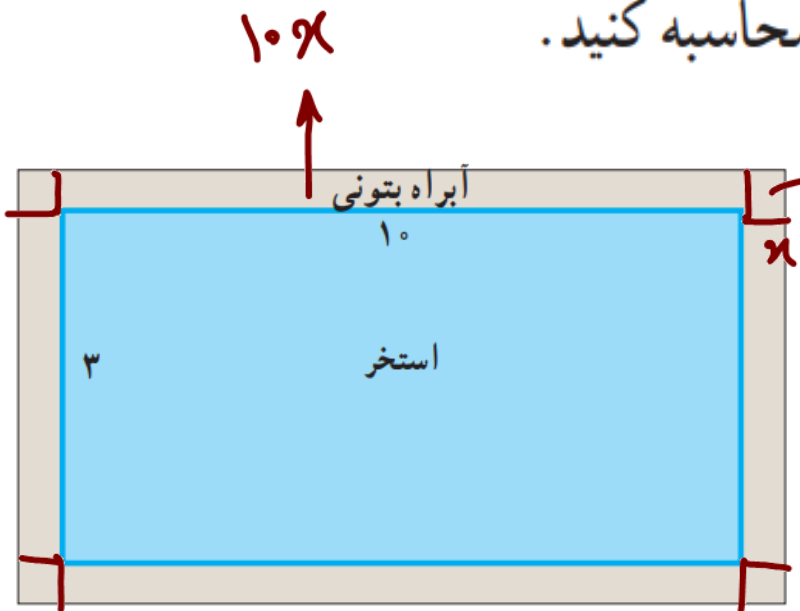
$$y = -x^2 - 4x - 5$$

$$a = -1$$

صفر ندارد



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



$$4x^2 + 20x + 4x = 14$$

$$4x^2 + 24x - 14 = 0$$

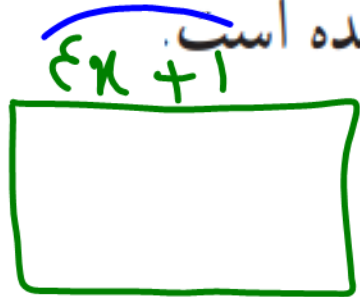
$$\div x^2 \rightarrow \frac{2x^2}{a} + \frac{12x}{b} - \frac{7}{c} = 0$$

$$\Delta = 149 - 4 \times 2 \times (-7) = 149 + 56 = 228 \rightarrow x = \frac{-12 \pm 15}{4} \begin{cases} \frac{-12}{4} = -3 \\ \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است.

۳۳

برای پوشانیدن دیواری به مساحت $۵۲/۸$ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است.
طول هر کاشی چند سانتی متر است؟



$x = 8$

$$2000 \cdot x(4x+1) = 528000$$

$$8000x^2 + 2000x - 528000 = 0$$

$$\div 1000 \rightarrow 8x^2 + 2x - 528 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 8 \times (-528) = 16900 \rightarrow x = \frac{-2 \pm 130}{14}$$

$\frac{128}{14} = 8$
 $\frac{-132}{14}$ (منفی)



معادلات زیر را حل کنید.

$$1 \quad \frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1} \rightarrow \frac{6}{x} - \frac{x-3}{x+1} = 2 \rightarrow \frac{6(x+1) - x(x-3)}{x(x+1)} = 2$$

$$\frac{6x+6 - x^2+3x}{x^2+x} = 2 \rightarrow \frac{-x^2+9x+6}{x^2+x} = \frac{2}{1}$$

۴۹+۷۲

$$2x^2+2x = -x^2+9x+6 \rightarrow \frac{3}{a}x^2 - \frac{7}{b}x - \frac{6}{c} = 0 \rightarrow \Delta = (-7)^2 - (3 \times 3 \times (-6)) = 121$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{3 \times 3} = \frac{7 \pm 11}{9}$$

$\left(\frac{18}{9} \right) \checkmark$
 $\left(-\frac{4}{9} \right) \checkmark$

$$\text{۲} \quad \frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2} \rightarrow \frac{P^2 + 2(2-P)}{P(2-P)} = \frac{-3}{2} \rightarrow \frac{P^2 - 2P + 4}{2P - P^2} = \frac{-3}{2}$$

$$2P^2 - 4P + 4 = -4P + 2P^2 \rightarrow P^2 - 2P - 4 = 0$$

$$(P - 4)(P + 2) = 0 \quad \begin{cases} P - 4 = 0 \rightarrow P = 4 \checkmark \\ P + 2 = 0 \rightarrow P = -2 \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{۳} \quad \frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} - \frac{y+1}{y} = 0 &\rightarrow \frac{3y+5 + \overbrace{y(y+5)}^{(y^2+5y+5)} - (y+1)(y+5)}{y(y+5)} = 0 \\
 &\quad \underbrace{y^2+5y}_{y(y+5)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cancel{3y+5} + \cancel{y^2} + \cancel{5y} - \cancel{y^2} - \cancel{5y} - \cancel{5} = 0 &\rightarrow y = 0 \quad \text{خفاص}
 \end{aligned}$$

$$۴ \quad ۲\sqrt{x} = \sqrt{۳x+۴} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴x = ۳x + ۴$$

$$۴x - ۳x = ۴$$

$$x = ۴ \quad \checkmark$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1-x}{1} \rightarrow (1+\sqrt{x}) \overbrace{(1-x)}^{1-\sqrt{x}^2} = 1-\sqrt{x}$$

$$(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) = (1-\sqrt{x})$$

$$\underbrace{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} - \underbrace{(1-\sqrt{x})} = 0$$

$$(1-\sqrt{x}) \times \left(\underbrace{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}_{1+2\sqrt{x}+x} - 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1 \\ 2\sqrt{x} + x = 0 \rightarrow \sqrt{x}(2+\sqrt{x}) = 0 \end{cases}$$

$\sqrt{x} = 0$
 $2+\sqrt{x} = 0$
 $\sqrt{x} = -2 \quad \times$

$x=0$ ✓

$x=1$ ✓

$$6 \quad \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \rightarrow \frac{8}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 2$$

$8\sqrt{x-1}$

$$\rightarrow \frac{8(\sqrt{x-2}) + \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = 2 \rightarrow \frac{4\sqrt{x-2} + 1}{x-4} = \frac{2}{1}$$

$$2x - 4 = 4\sqrt{x-2} - 4 \rightarrow 2x - 4\sqrt{x-2} = 0 \rightarrow 2\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2} - 2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{x-2} = 0 \rightarrow \sqrt{x-2} = 0 \rightarrow x = 2 \checkmark \\ \sqrt{x-2} - 2 = 0 \rightarrow \sqrt{x-2} = 2 \rightarrow x = 10 \checkmark \end{array} \right.$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 \rightarrow (\sqrt{3x+1})^2 = (4 - \sqrt{x+3})^2 \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$3x+1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x+3 \rightarrow 2x-18 = -8\sqrt{x+3}$$

$$\div 2 \rightarrow (x-9)^2 = (-4\sqrt{x+3})^2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 18x + 81 = 16(x+3)$$

$$\underbrace{1x^2}_{a} - \underbrace{34x}_{b} + \underbrace{33}_{c} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \checkmark \\ x = \frac{c}{a} = 33 \text{ غلط} \end{cases}$$

۸ پدر بزرگ برای اهدا به مهد کودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدر بزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

قیمت هر اسباب بازی قبل تخفیف: x

$$nx = 120$$

تعداد اسباب بازی: n

$$(n+4)(x-1) = 120$$

$$\cancel{nx} - n + 4x - 4 = 120$$

$$n = 4x - 4$$

$$(4x-4)x = 120 \rightarrow 4x^2 - 4x - 120 = 0$$

$$x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \text{ هزار}$$

$$\rightarrow x^2 - 1x - 30 = 0 \rightarrow (x-6)(x+5) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+5=0 \rightarrow x=-5 \\ x-6=0 \rightarrow x=6 \end{array} \right.$$

۹ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

$B \rightarrow x = ۴۵$ (ساعت) $\rightarrow \frac{1}{x}$
 $A \rightarrow x - 15 = ۴۵ - 15 = ۳۰$ (ساعت) $\rightarrow \frac{1}{x-15}$
 $A, B \rightarrow 18 \rightarrow \frac{1}{18}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-15} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{x-15+x}{x(x-15)} = \frac{2x-15}{x^2-15x} \neq \frac{1}{18}$$

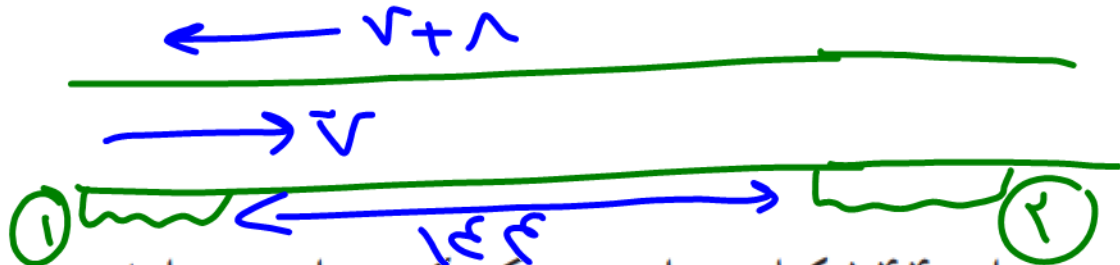
$$x^2 - 15x = 36x - 270$$

$$x^2 - 51x + 270 = 0 \rightarrow (x-6)(x-45) = 0$$

غ ق ق
 $x=6$
 $x=45$



حل تمرینات صفحه ۲۲ کتاب مسابان



۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

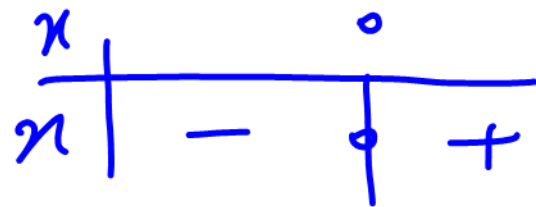
$t = \frac{x}{v}$
 $t_1 + t_2 = 18 \rightarrow \frac{144}{v} + \frac{144}{v+8} = 18$

$48(v+8) + 48v = 18 \rightarrow \frac{96v + 384}{v^2 + 8v} = \frac{18}{1}$
 $8v^2 + 8v = 96v + 384$
 $8v^2 - 88v - 384 = 0$

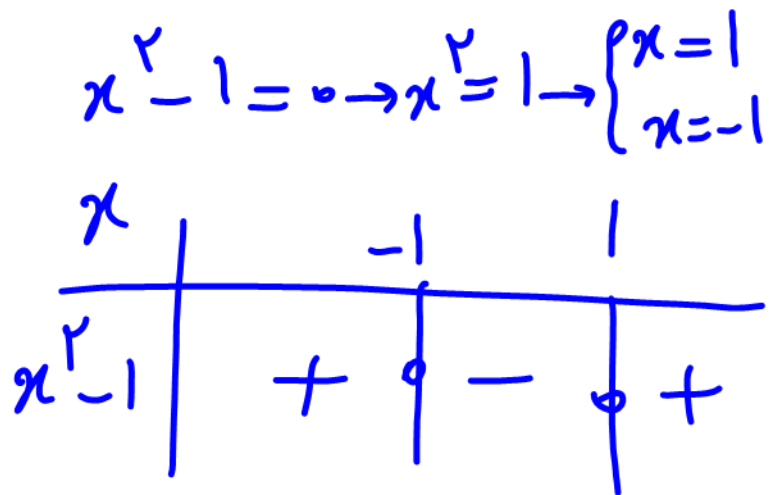
$\Delta = (-88)^2 - 4 \times 8 \times (-384) = 3136 + 12288 = 15424 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 124$
 $v = \frac{88 \pm 124}{16} \rightarrow v = 13.5$

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$\text{الف) } f(x) = \underbrace{x|x|}_0 = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



$$\text{ب) } g(x) = \underbrace{|x^2 - 1|} = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ -x^2 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$پ) h(x) = \underbrace{|x-1|}_{x=1} + \underbrace{|x+1|}_{x=-1}$$

x		-1		1				
$x-1$		-		-		0		+
$x+1$		-		0		+		+

$$= \begin{cases} -x+x-x-x = -2x & x \leq -1 \\ -x+1+x+1 = 2 & -1 < x < 1 \\ x-x+x+x = 2x & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$



نکته: فاصله نقطه x از a برابر با $|x-a|$

حل تمرینات صفحه ۲۸ کتاب مسابان ۱

۲ بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های -۱ و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟

$$\underbrace{x = -1}_{\text{نقطه اول}} \quad \underbrace{x = 3}_{\text{نقطه دوم}}$$

$$|x - (-1)| + |x - 3| = 6$$

	-1	3
$x+1$	$-$	$+$
$x-3$	$-$	$+$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x-1-x+3=6 \rightarrow -2x+2=6 \quad x \leq -1 \rightarrow -2x=4 \rightarrow \underline{x=-2} \checkmark \\ x+1-x+3=6 \rightarrow 4=6 \quad -1 < x < 3 \quad \text{جواب ندارد} \quad \times \\ x+1+x-3=6 \rightarrow 2x-2=6 \quad x \geq 3 \rightarrow 2x=8 \rightarrow \underline{x=4} \checkmark \end{array} \right.$$

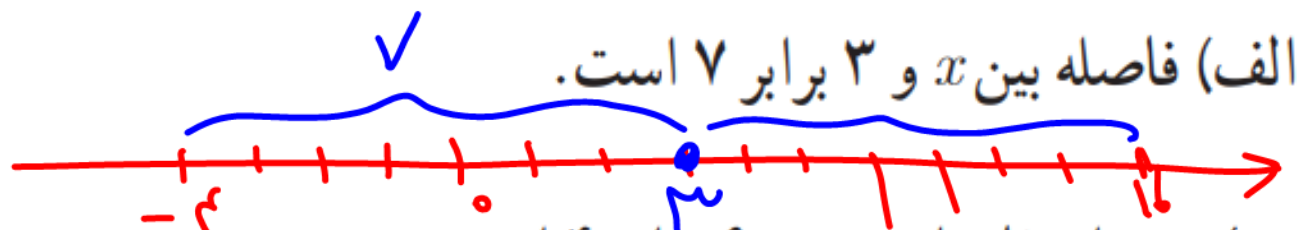


$$|x| > a \rightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} \quad \text{نکته:}$$

حل تمرینات صفحه ۲۸ کتاب مسابان۱

۳ هر یک از عبارتهای زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$|x-3|=7 \rightarrow \begin{cases} x-3=7 \rightarrow x=10 \\ x-3=-7 \rightarrow x=-4 \end{cases}$$



الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

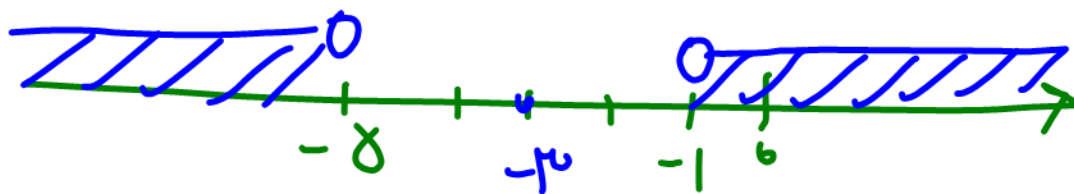
$$2|x-6|=4 \xrightarrow{\div 2} |x-6|=2 \rightarrow \begin{cases} x-6=2 \rightarrow x=8 \\ x-6=-2 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.



$$|x-(-3)| > 2 \rightarrow \begin{cases} x+3 > 2 \rightarrow x > -1 \\ x+3 < -2 \rightarrow x < -5 \end{cases}$$

پ) فاصله بین x و -۳ بزرگتر از ۲ است.





۴ دو معادله زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = \frac{1}{1} \rightarrow |x-3| = 2-x \rightarrow \begin{cases} x-3 = 2-x \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5 \\ x-3 = -2+x \end{cases}$

جواب ندارد

غلط

۰/۵

ب) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \rightarrow (|x-1|)^2 = (2x+1)^2 \rightarrow (x-1)^2 = (2x+1)^2$

$\rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$

$3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0$

$\begin{cases} 3x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$

غلط

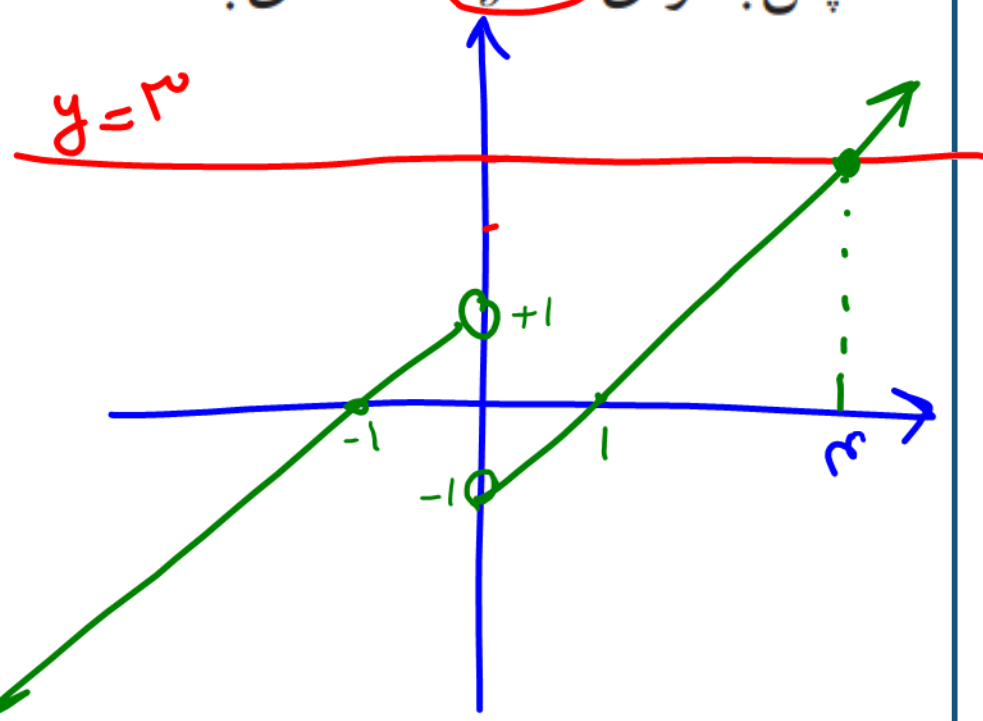
۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید،

سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

$$\text{الف) } y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - \frac{x}{x} = x - 1 & [-1] [\cdot] x > 0 \\ x - \frac{x}{-x} = x + 1 & [0] [-1] [\cdot] x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 3 \rightarrow x = 4 \\ x + 1 = 3 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

006





AFSHAR
ACADEMY

$$x^2 - 4x + 9 - 9 = |(x-3)^2 - 9|$$

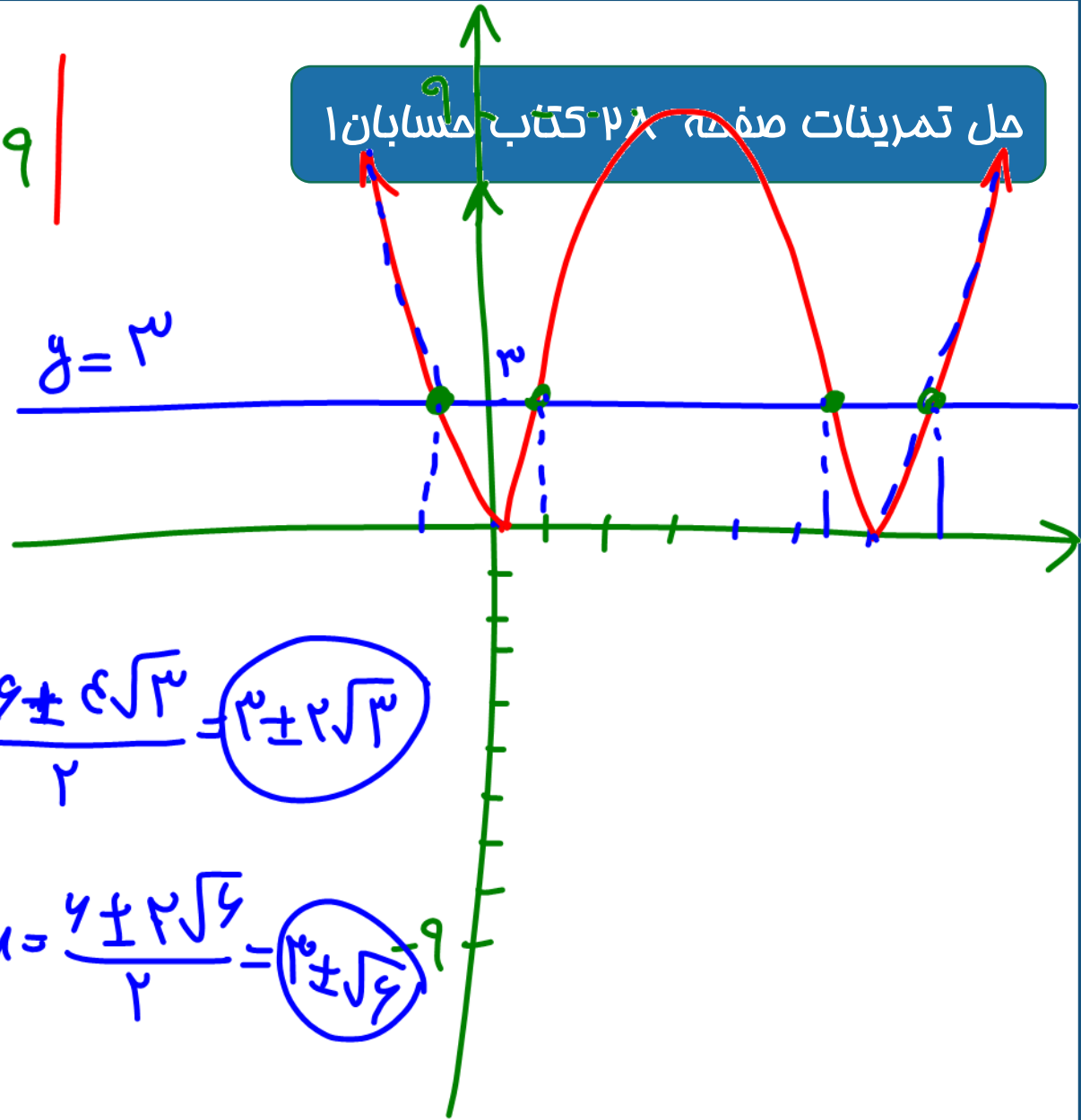
ب) $y = |x^2 - 4x|$

$$|x^2 - 4x| = 3 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 3 \\ x^2 - 4x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 16 + 12 = 28 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7} \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 1 \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 16 + 12 = 28 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7} \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 1 \pm 1 \end{cases}$$

حل تمرینات صفحه ۲۸ کتاب مسابان ۱



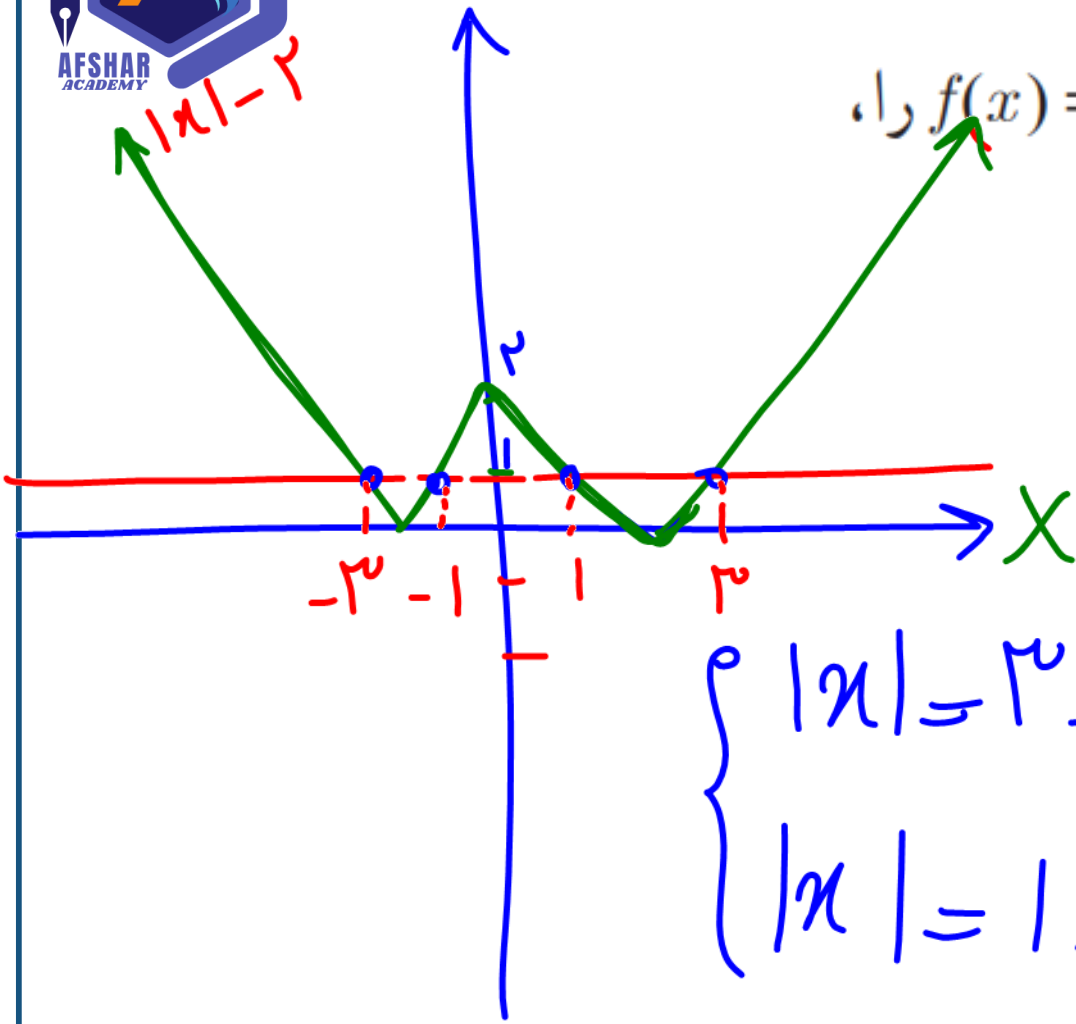


۶ نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را،

هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

$$||x| - 2| = 1 \rightarrow \begin{cases} |x| - 2 = 1 \\ |x| - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \\ |x| = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$



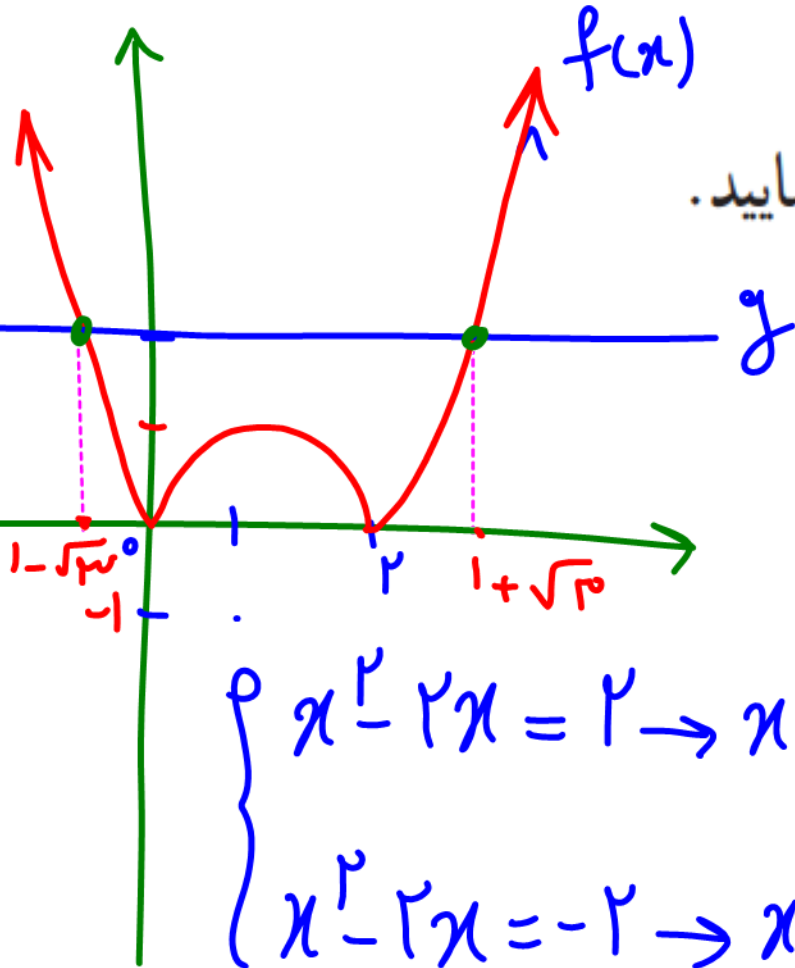


$$x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

حل تمرینات صفحه ۲۸ کتاب مسابان ۱

۷ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید،

سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.



$$\begin{cases} x^2 - 2x = 2 \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 + 8 = 12 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \\ x^2 - 2x = -2 \rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \end{cases}$$

جواب ندارد



$$AH = \frac{|9 \times 7 - 5 \times (-1) - 12|}{\sqrt{25 + 81}} = \frac{86}{\sqrt{106}}$$

$$BC = \sqrt{(-6-3)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106}$$

حل تمرینات صفحه ۳۵ کتاب مسابان

۱ مثلث ABC به رأس‌های A(-1, 7) و B(-6, -2) و C(3, 3) را در نظر بگیرید.

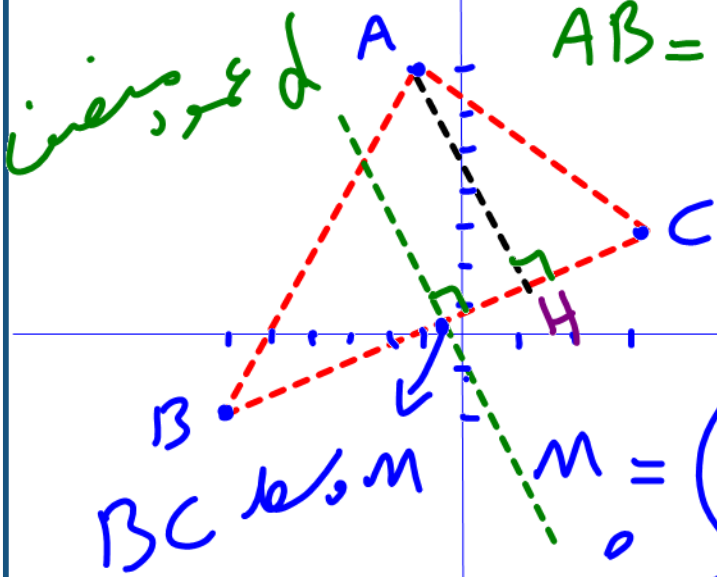
$$AB = \sqrt{(-1-(-6))^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

$$AB = BC$$

الف) مثلث را رسم کنید.
ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟



$$M = \left(\frac{-6+3}{2}, \frac{-2+3}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{شیب } BC = \frac{-2-3}{-6-3} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9} \rightarrow \text{شیب عمود منصف} = -\frac{9}{5}$$

$$y = \frac{5}{9}x + b$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{9} \left(-\frac{3}{2} \right) + b \rightarrow b = \frac{13}{9}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{13}{9}$$

$$y = -\frac{9}{5}x + b$$

$$\frac{7}{2} = -\frac{9}{5} \left(-\frac{3}{2} \right) + b \rightarrow b = \frac{1}{2} - \frac{27}{10} = -\frac{11}{5}$$

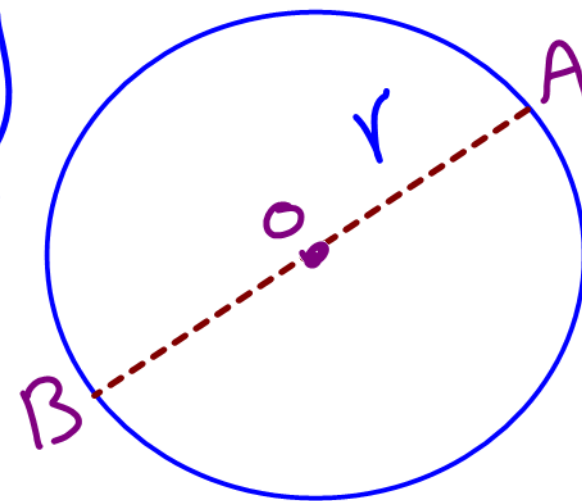
$$y = -\frac{9}{5}x - \frac{11}{5}$$

$$9y - 5x - 12 = 0 \quad \text{معادله BC}$$

۲. $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ نقاط دوسر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

$$O = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{-8+6}{2} \right) = (4, -1)$$

$$r = OA = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-6)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$





حل تمرینات صفحه ۳۵ کتاب مسابان

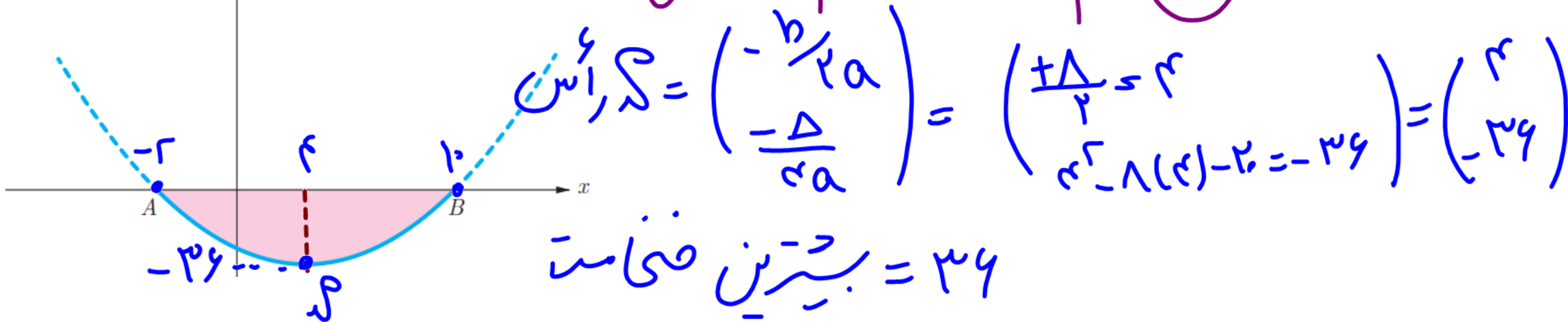
۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = \widehat{a}x^2 - \widehat{b}x - \widehat{c}$ مطابق شکل زیر مدل سازی می شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به دست آورید. $x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow (x-10)(x+2) = 0$
ب) اگر x بر حسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.

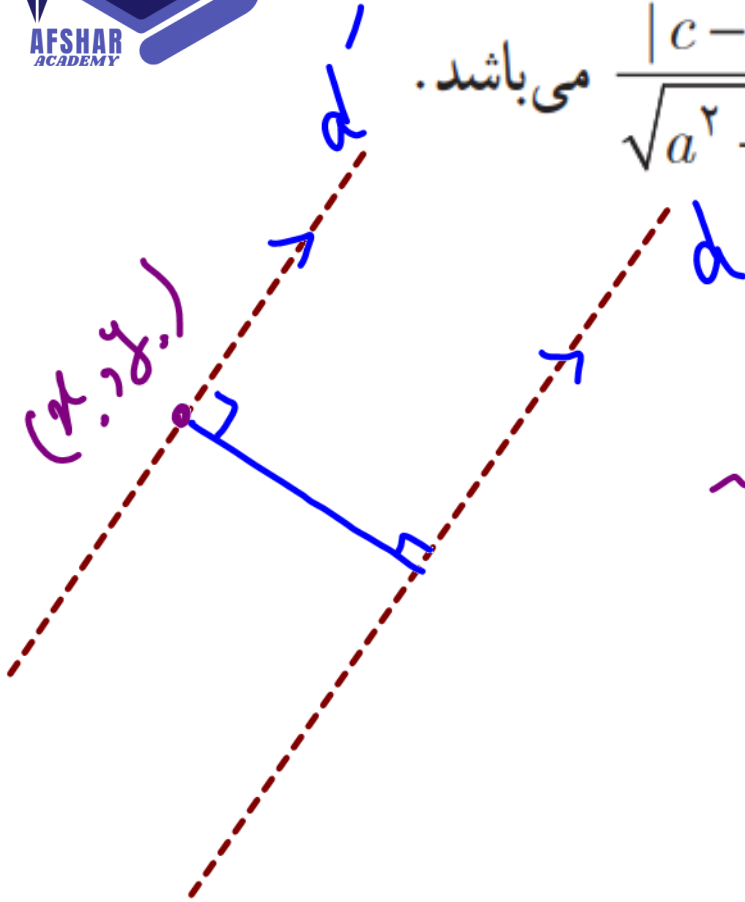
$$\begin{cases} x-10=0 \rightarrow x=10 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

$$AB \text{ طول} = |10 - (-2)| = 12$$



۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می باشد.

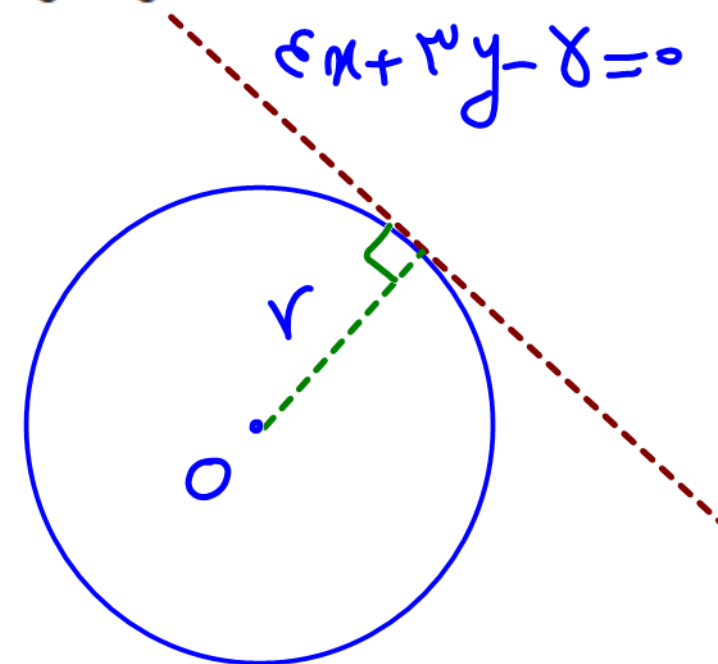


$$ax_0+by_0+c'=0 \rightarrow ax_0+by_0=-c'$$

$$فاصله = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c'+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۵ خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

$$r = \frac{|4(-1) + 3(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-4 + 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5}$$





$$x^2 + 8^2 = 10^2 \rightarrow x^2 = 100 - 64 = 36$$

$$x = 6$$

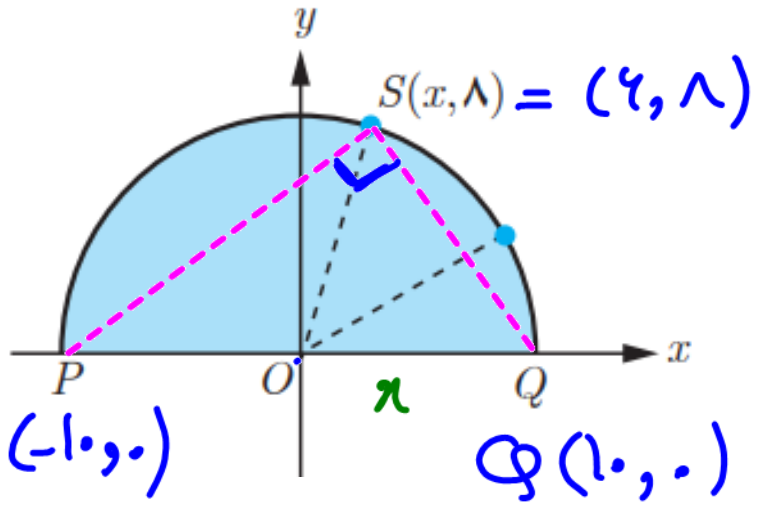
حل تمرینات صفحه ۳۵ کتاب مسابان

۶ نقطه $S(x, 8)$ روی نیم دایره‌ای به شعاع 10° در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) مقدار x را به دست آورید.

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به دست آورید.

پ) نشان دهید \hat{PSQ} قائمه است.



$P(-10, 0)$

$Q(10, 0)$

$$\begin{aligned} \text{شیب } PS &= \frac{8-0}{4-(-10)} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \\ \text{شیب } SQ &= \frac{8-0}{4-10} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{7} \times (-\frac{4}{3}) = -1 \leftarrow$$

۷ اگر فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$$\frac{|a(1)+4(2)-1|}{\sqrt{a^2+4^2}} = 2 \rightarrow \frac{|a+7|}{\sqrt{a^2+16}} = 2$$

$$|a+7| = 2\sqrt{a^2+16} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2 + 14a + 49 = 4(a^2 + 16)$$

$$3a^2 - 14a + 18 = 0 \rightarrow a^2 - 14a + 18 = 0 \rightarrow (a-9)(a-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{3} = 3 \\ a = \frac{8}{3} \end{cases}$$



$$m_C = \frac{-5-1}{-7-3} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

حل تمرینات صفحه ۳۵ کتاب مسابان

۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ ، $C(3, 1)$ می باشند.

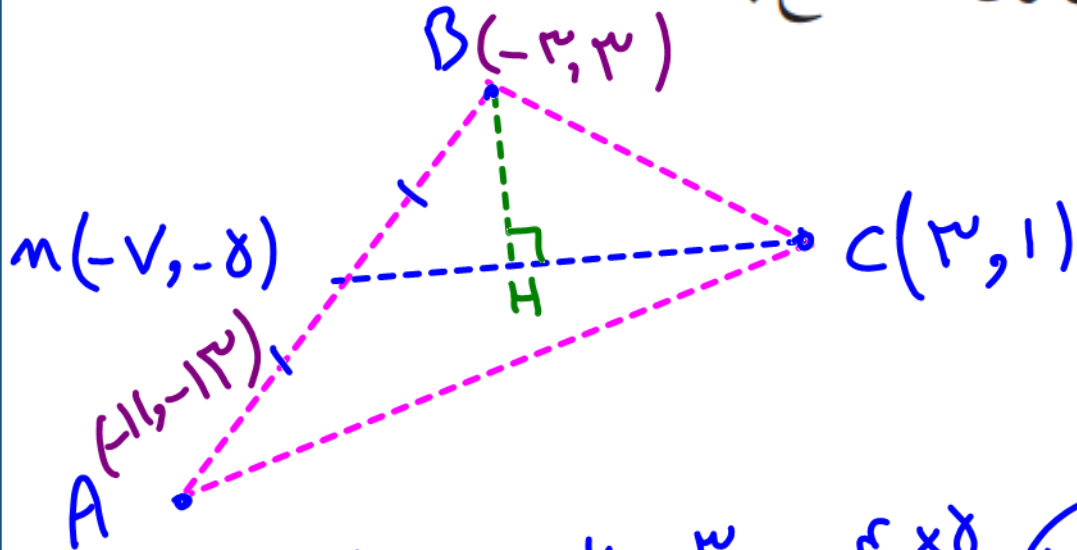
الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می شود به دست آورید.

$$y = \frac{3}{5}x + b$$

$$1 = \frac{3}{5} \times 3 + b \rightarrow b = -\frac{4}{5}$$

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

$$BH = \frac{|5 \times 3 - 3 \times (-3) + 4|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{28}{\sqrt{34}}$$



نکته: $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد.

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

$x_D + (-3) = -11 + 3 \rightarrow x_D = -8$
 $y_D + 3 = -13 + 1 \rightarrow y_D = -18$
 $\rightarrow D = (-8, -18)$

$$BC \text{ معادله} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5} \rightarrow 5y - 3x + 4 = 0$$



$$\left(\frac{\sqrt{8}-2}{-2}, -\sqrt{8}+2\right) \text{ و } \left(\frac{\sqrt{8}+2}{2}, \sqrt{8}+2\right)$$

حل تمرینات صفحه ۳۵ کتاب مسابان

(۰,۰)

(۲, ۲)

۹ نقطه‌ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2,4)$ برابر ۵ باشد.

$$\sqrt{x^2 + (2x)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2} = 5$$

$$\sqrt{x^2 + 4x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 16x + 16} = 5$$

$$\sqrt{5x^2} + \sqrt{5x^2 - 20x + 20} = 5$$

$$\sqrt{5} \sqrt{x^2} + \sqrt{5} \sqrt{(x-2)^2} = 5$$

$$\sqrt{x^2} + |x-2| = \sqrt{5}$$

$$-x - x + 2 = \sqrt{5} \quad x \leq 0$$

$$x - x + 2 = \sqrt{5} \quad 0 < x < 2$$

$$x + x - 2 = \sqrt{5} \quad x \geq 2$$

$$-2x + 2 = \sqrt{5} \rightarrow -2x = \sqrt{5} - 2 \rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 2}{-2}$$

$$2x - 2 = \sqrt{5} \rightarrow 2x = \sqrt{5} + 2 \rightarrow x = \frac{\sqrt{5} + 2}{2}$$



$$M = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{-2+(-1)}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{-3}{2} \right)$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{2}{2}-4\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

حل تمرینات صفحه ۳۵ کتاب مسابان

۱۰ نقاط $A(4,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(8,-2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر M و H به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM

باشند طول MH را به دست آورید.

$$\text{شیب } BC = \frac{-2-(-1)}{8-1} = \frac{-1}{7} \rightarrow y = \frac{-1}{7}x + b$$

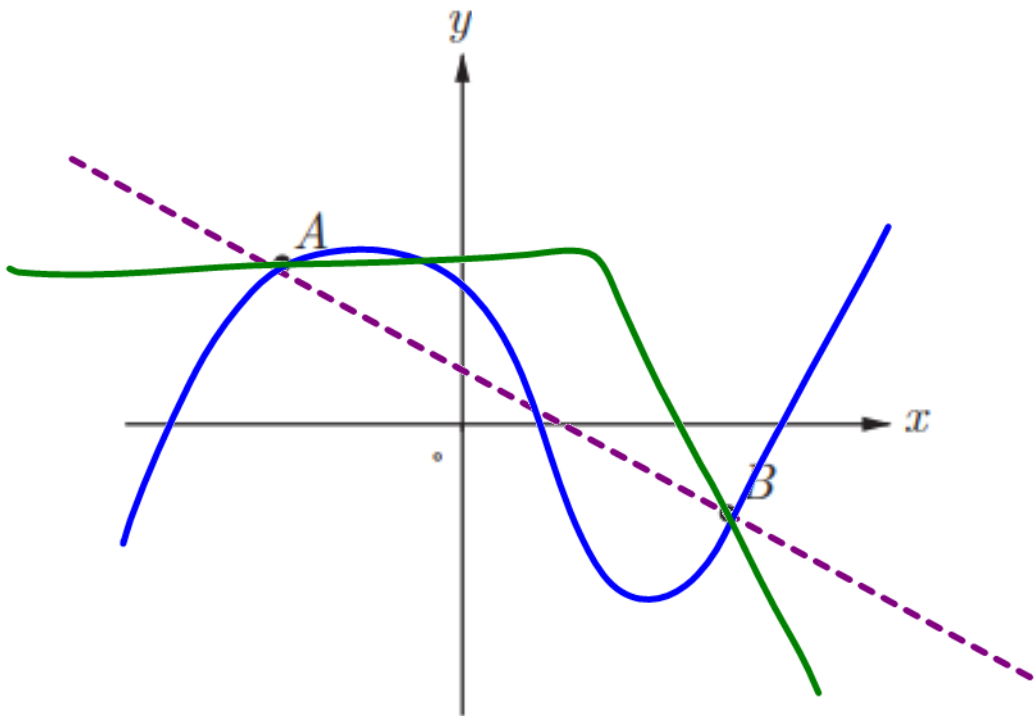
$$-1 = \frac{-1}{7} \times 1 + b \rightarrow b = -1 + \frac{1}{7} = \frac{-6}{7}$$

معادله $BC \Rightarrow y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7} \xrightarrow{\times 7} 7y + x + 6 = 0$

$$AH = \frac{|7 \times 2 + 4 + 6|}{\sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{24}{\sqrt{50}}$$

$$HM^2 = AM^2 - AH^2 = \frac{50}{4} - \frac{576}{50} = \frac{1250 - 1152}{100} = \frac{98}{100} \rightarrow HM = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ **بی شمار**





$$f = \{(1, 2) (2, 1)\}$$

$$D_f = \{1, 2\}$$

$$R_f = \{1, 2\}$$

$$g = \{(1, 1) (2, 2)\}$$

$$D_g = \{1, 2\} \quad R_g = \{1, 2\}$$

حل تمرینات صفحه ۴۲-۴۳ کتاب مسابان

۲ کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند. \times

ب) برد و هم دامنه تابع می توانند یکی باشند. \checkmark

پ) هم دامنه تابع زیر مجموعه ای از برد آن است. \times

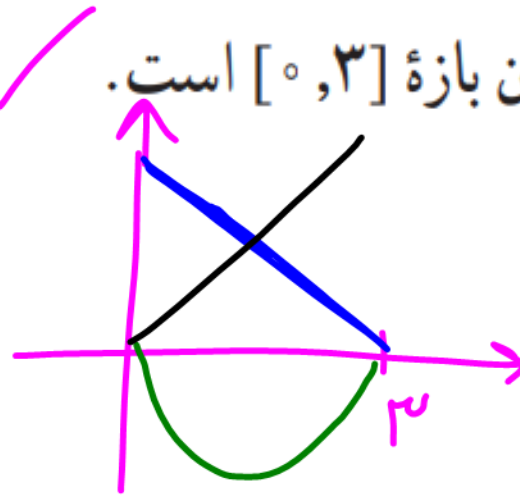
ت) بی شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0, 3]$ است. \checkmark

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = -x + 2$$

هم دامنه \subseteq برد

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \dots \end{cases}$$





حل تمرینات صفحه ۴۲-۴۳ کتاب مسابان ۱

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد.
چه تعداد از این توابع وجود دارند؟
جیب شمار

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$



$2^3 = 8$

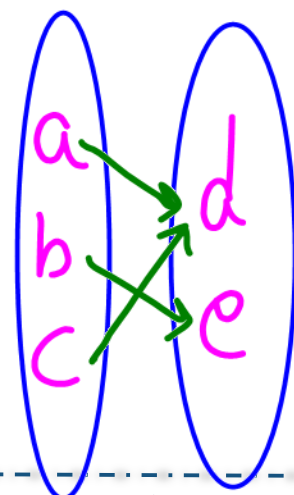
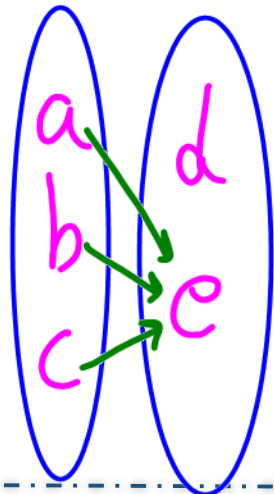
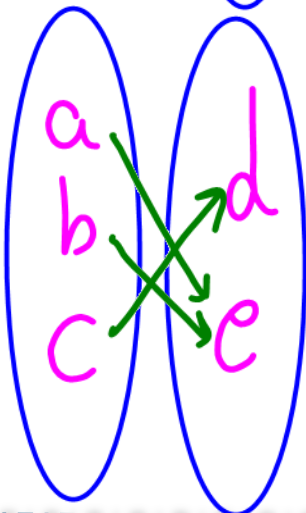
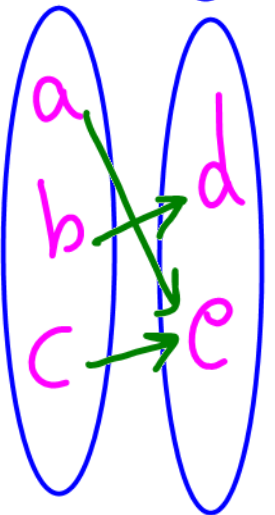
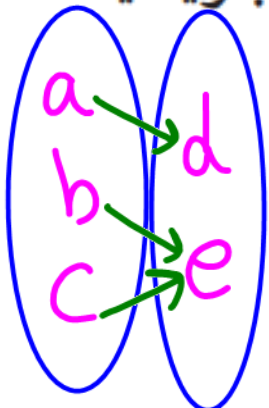
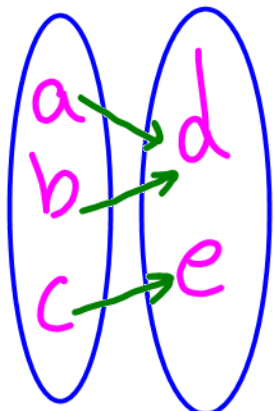
$n(B) = 2$

$n(A) = 3$

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ را بنویسید

(از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

نکته: تعداد توابع از مجموعه A به مجموعه B برابر $n(A)^{n(B)}$ است.
 $A \rightarrow B$



۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases}$$

$$\begin{cases} r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ r(a) = \Delta a \end{cases}$$

$$\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \Delta x \end{cases}$$

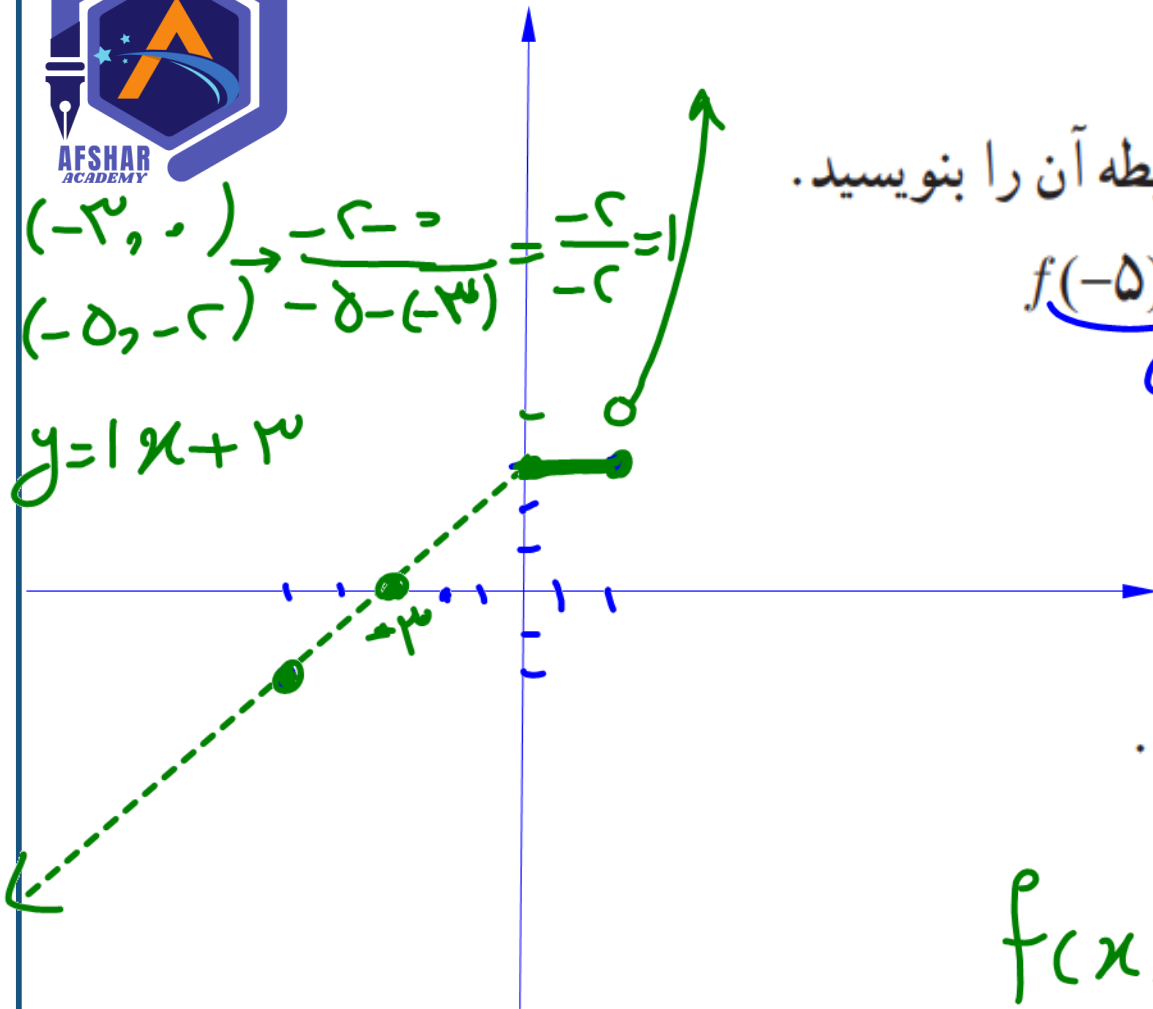
$$\begin{cases} s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s(a) = \Delta a \end{cases}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \Delta x \end{cases}$$



AFSHAR
ACADEMY



$$\begin{aligned} (-2, 0) &\rightarrow \frac{-2-0}{-2-(-3)} = \frac{-2}{-2} = 1 \\ (-5, -2) &\rightarrow \frac{-2-(-2)}{-5-(-3)} = \frac{0}{-2} = 0 \end{aligned}$$
$$y = x + 3$$

حل تمرینات صفحه ۴۲-۴۳ کتاب مسابان ۱

۶ تابع f در همه شرایط زیر صدق می کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$
(ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.
پ) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می دهد.
ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است

و نمودار آن محور x ها را در نقطه ای به طول ۳- قطع می کند.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 0 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$



۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می توان طول قد یک انسان بزرگسال را برآورد کرد:

$$m(۳۵) = ۲,۱۸۹x + ۷۰,۱۶۴ = ۱۷۱,۷۹ \quad \begin{matrix} ۳۵ \\ \uparrow \end{matrix}$$
$$M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴$$

تابع خطی برای مردان

$$m(x) = ۱۸۵$$

$$F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$$

تابع خطی برای زنان

که در آنها x طول استخوان بازو بر حسب سانتی متر است.

$$۲,۱۸۹x + ۷۰,۱۶۴ = ۱۸۵ \rightarrow ۲,۱۸۹x = ۱۸۵ - ۷۰,۱۶۴$$

$$۲,۱۸۹x = ۱۱۴,۳۳۶$$

$$x = ۳۹,۸۷$$

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

پ) برای تابع $F(x)$ نیز مشابه الف و ب یک سؤال طرح کنید و به آن پاسخ دهید.

۱ دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x-1}{2-x} = 0$

$x = 2$

$D = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) $f(x) = \frac{-3x}{x^2+1} = 0$ ✕
 $x^2 = -1$

$D = \mathbb{R}$

پ) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12} = 0$

$(x+4)(x-3) = 0$ $\begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{-4, 3\}$

ت) $f(x) = \sqrt{3x+1}$

$3x+1 \geq 0 \rightarrow 3x \geq -1$

$\rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \rightarrow D = [-\frac{1}{3}, +\infty)$

ث) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$

$x \geq 0$

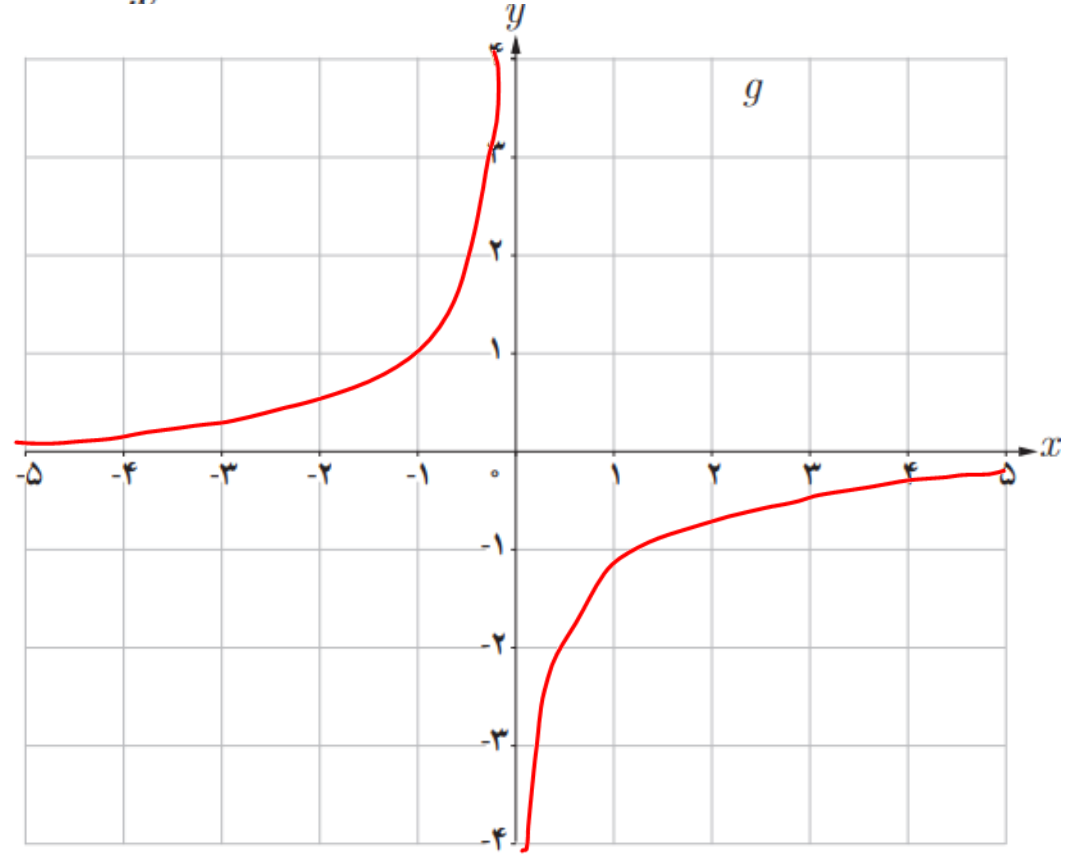
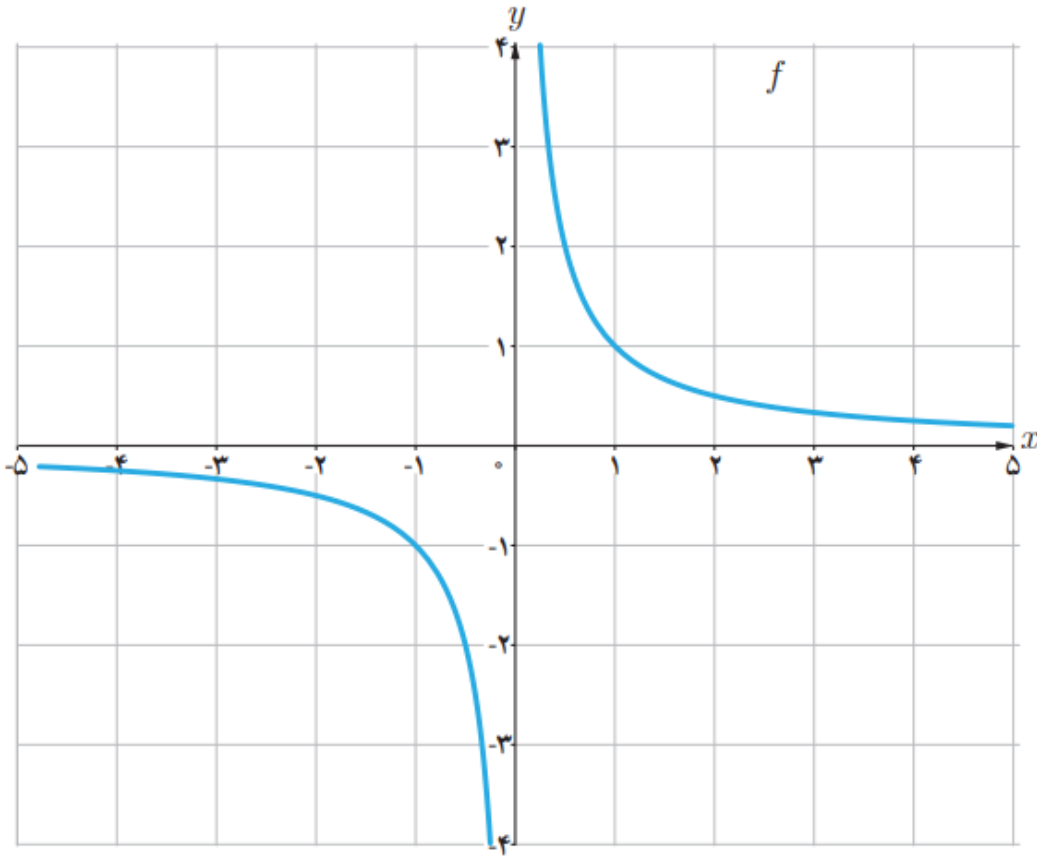
$D = [0, +\infty)$

ج) $f(x) = \sqrt{1-x}$

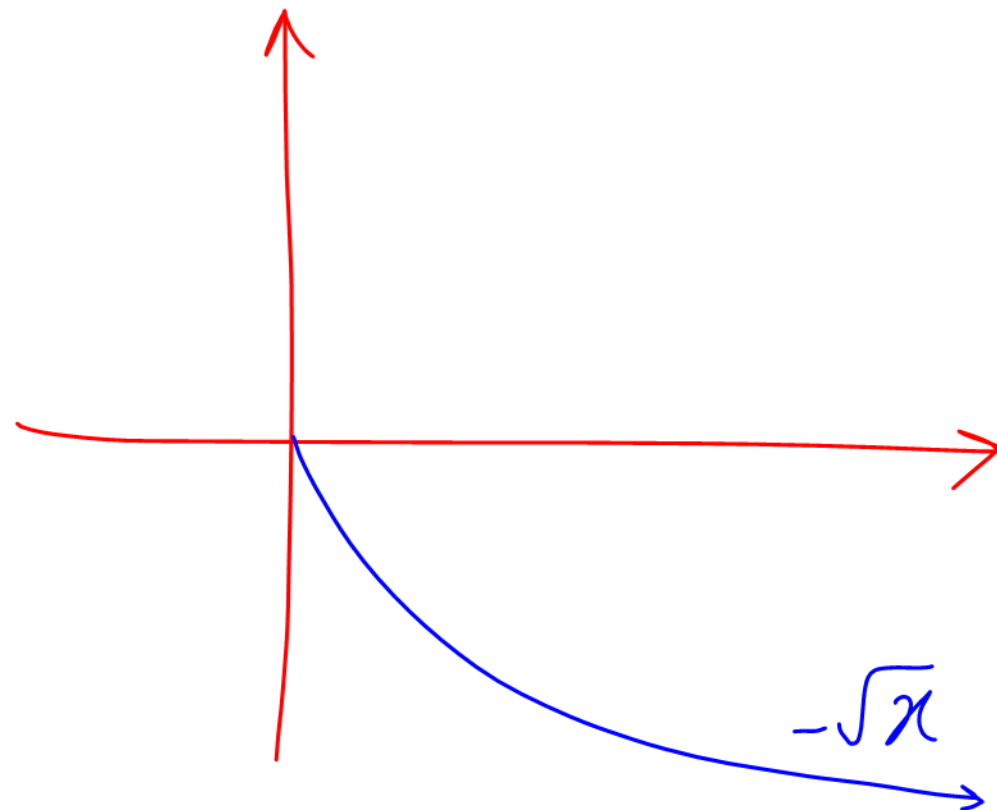
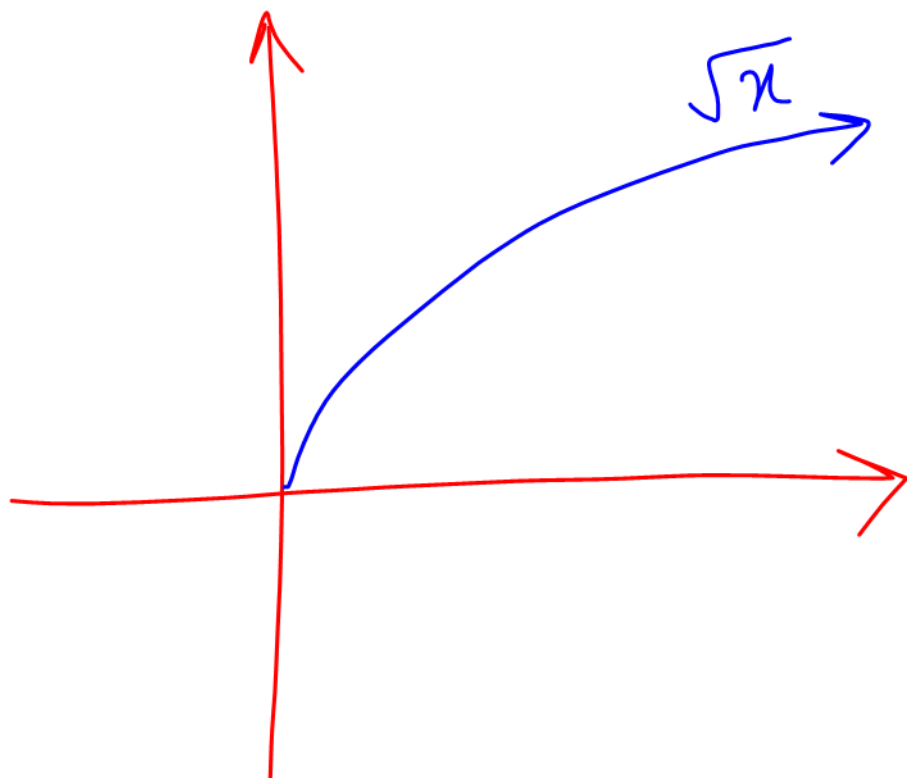
$1-x \geq 0 \rightarrow 1 \geq x$

$D = (-\infty, 1]$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.



۳ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.



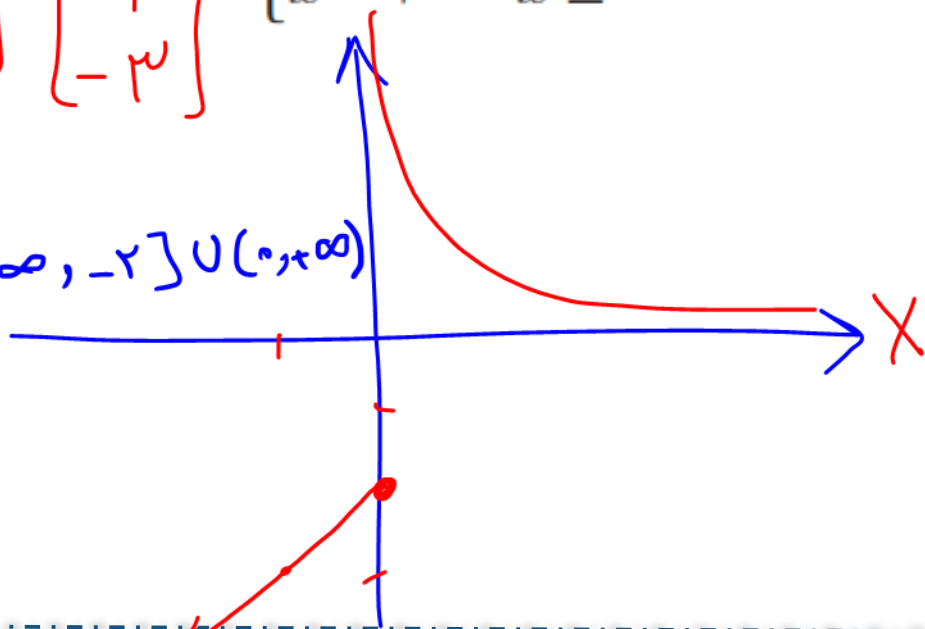
۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$D = \mathbb{R}$

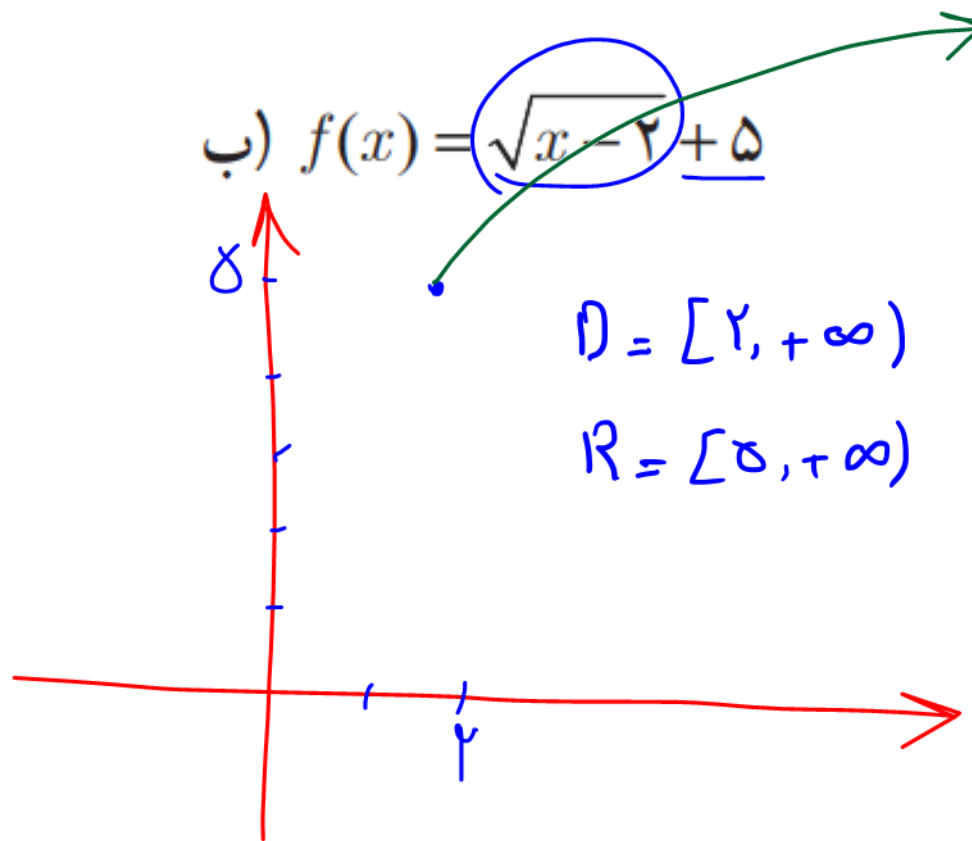
$R = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$



ب) $f(x) = \sqrt{x - 2} + 5$

$D = [2, +\infty)$

$R = [5, +\infty)$



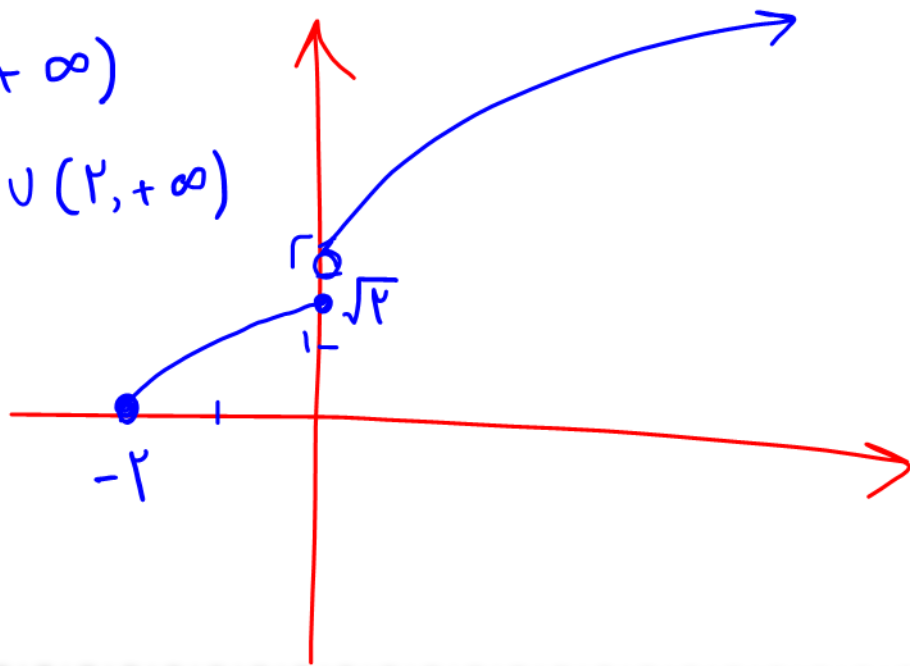


حل تمرینات صفحه ۵۲ - ۵۳ کتاب مسابان ۱

$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$D = [-2, +\infty)$$

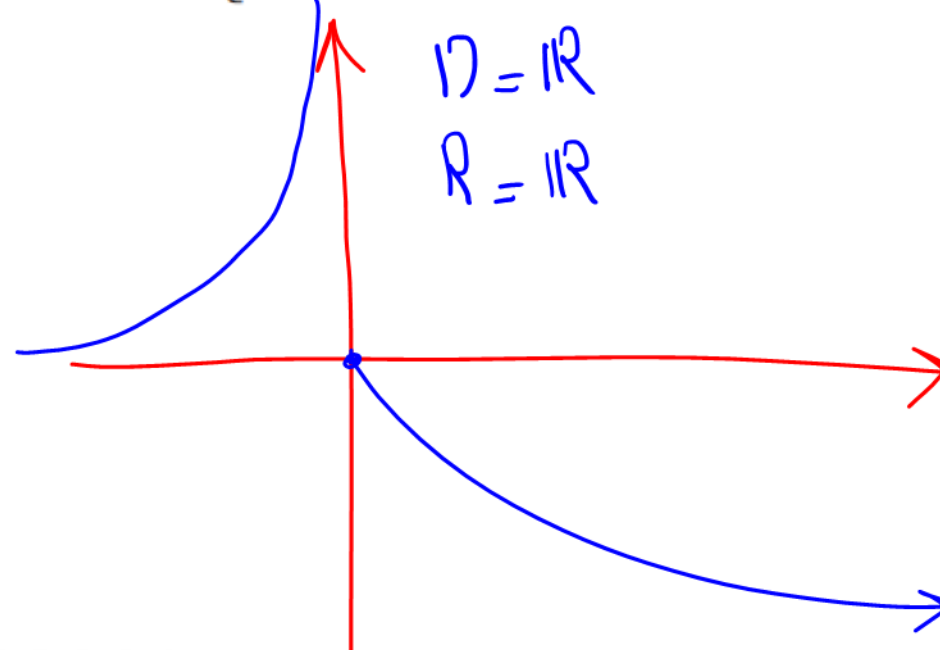
$$R = [0, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty)$$

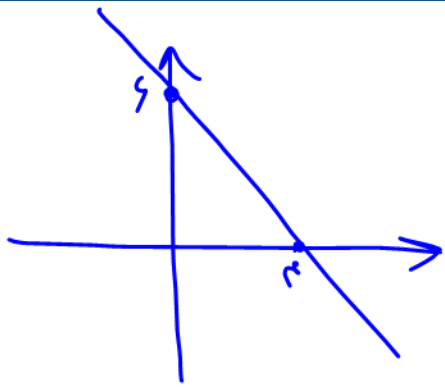


$$\text{ت) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = \mathbb{R}$$





حل تمرینات صفحه ۵۲ - ۵۳ کتاب مسابان ۱

۵ کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند؟

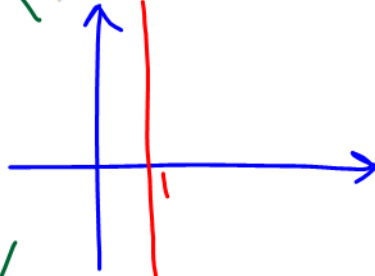
✓ الف) $3x + 2y = 12$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

✗ ت) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

✗ ب) $x = 1$



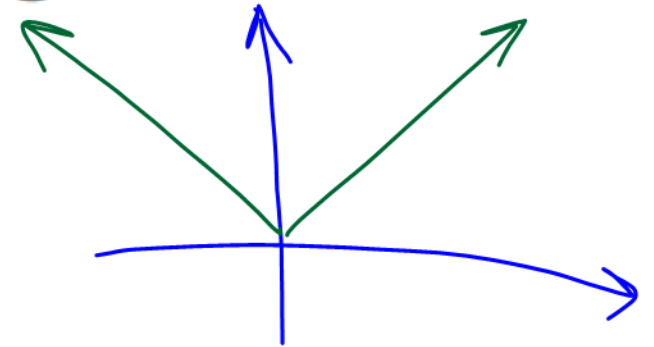
✗ ث) $y^2 = x^2$

$$x = 2 \rightarrow y \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

✓ پ) $y = -2$



✓ ج) $y = |x|$



۶ هزینه پاک سازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می شود

که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک سازی بر حسب میلیون تومان است.

$$f(50) = \frac{255 \times 50}{100 - 50} = 255$$

الف) هزینه پاک سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

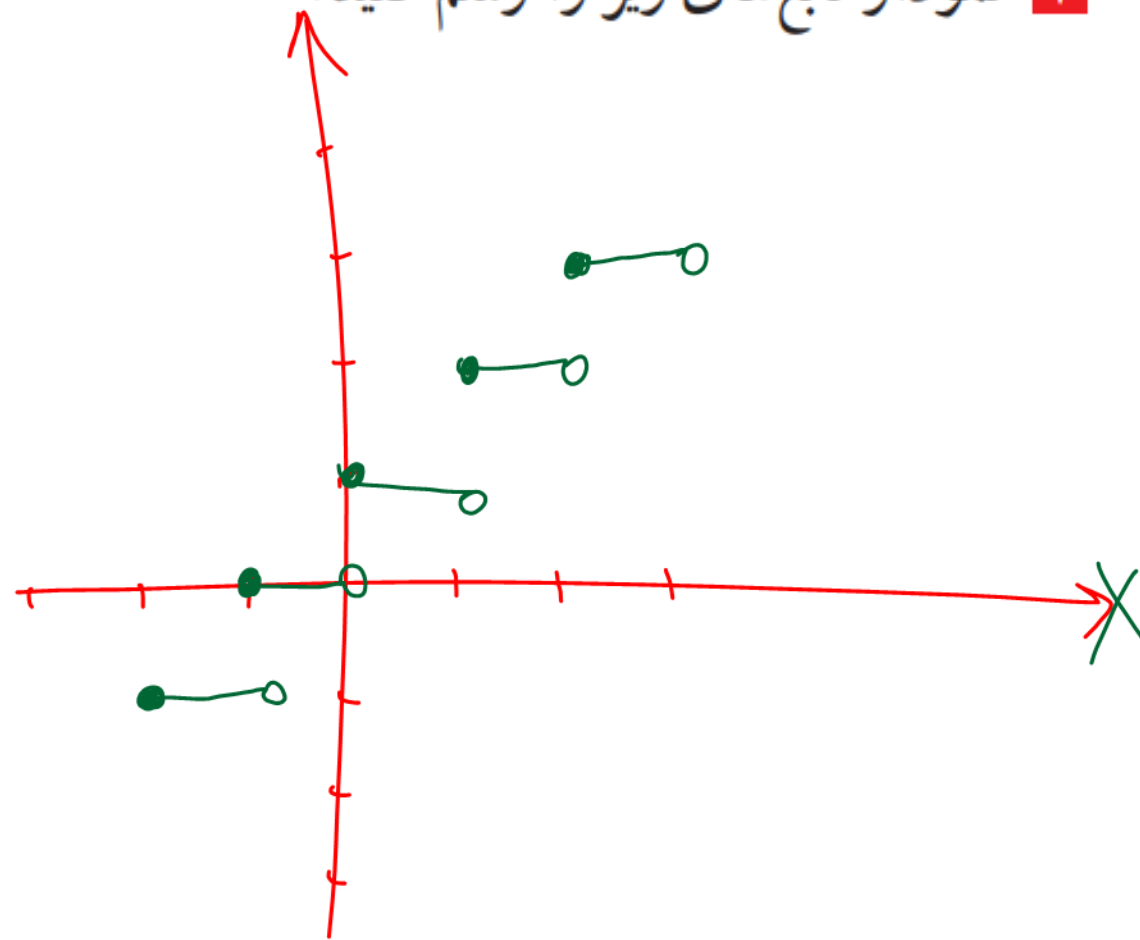
ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

$$D_f = [0, 100)$$

الف) $f(x) = \overbrace{[x]}^2 + 1$, $-2 \leq x < 3$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x < -1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 3 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.



ب) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x \right]$, $-4 \leq x < 4$

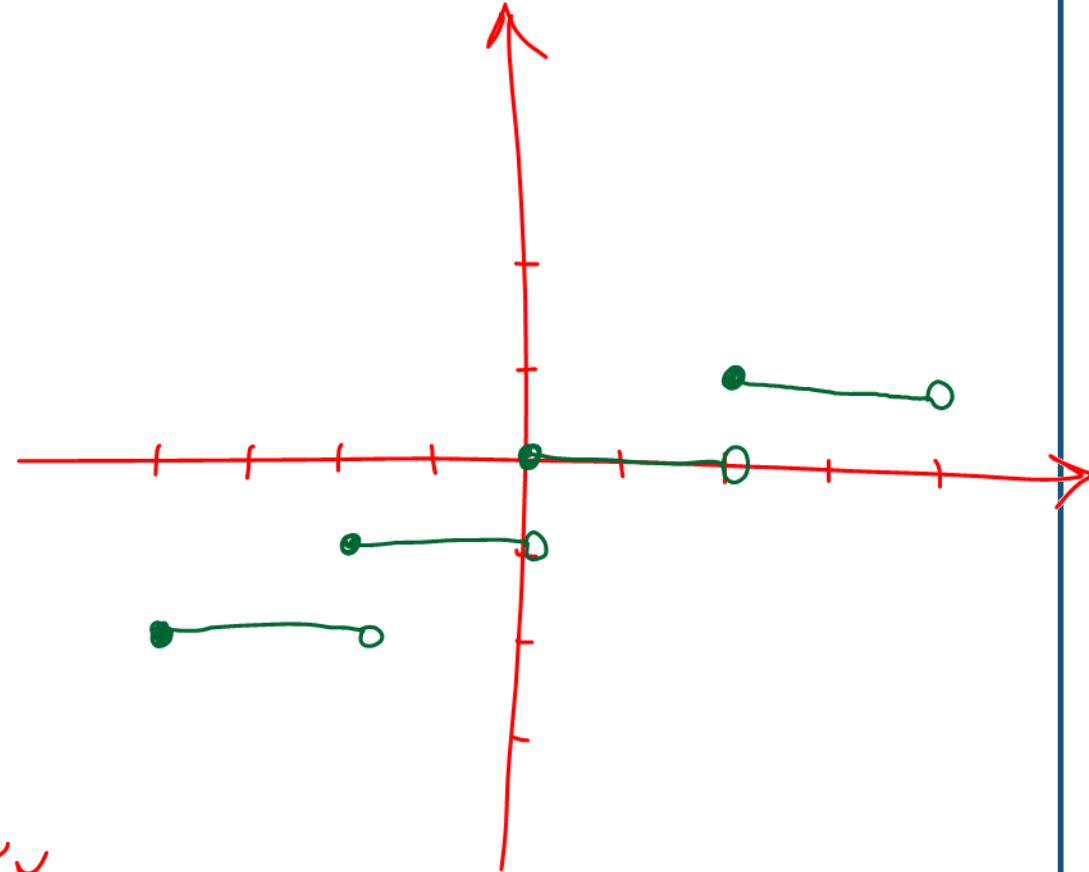
$f(x) = \begin{cases} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$

$-4 \leq x < -2 \rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}x < -1$

$-2 \leq x < 0 \rightarrow -1 \leq \frac{1}{2}x < 0$

$0 \leq x < 2 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}x < 1$

$2 \leq x < 4 \rightarrow 1 \leq \frac{1}{2}x < 2$





حل تمرینات صفحه ۵۲ - ۵۳ کتاب مسابان ۱

$0 \leq x < 1$
 $y = [x] - 3 = -3$
 $y = [x - 3] = -3$
 $-3 \leq x - 3 < -2$

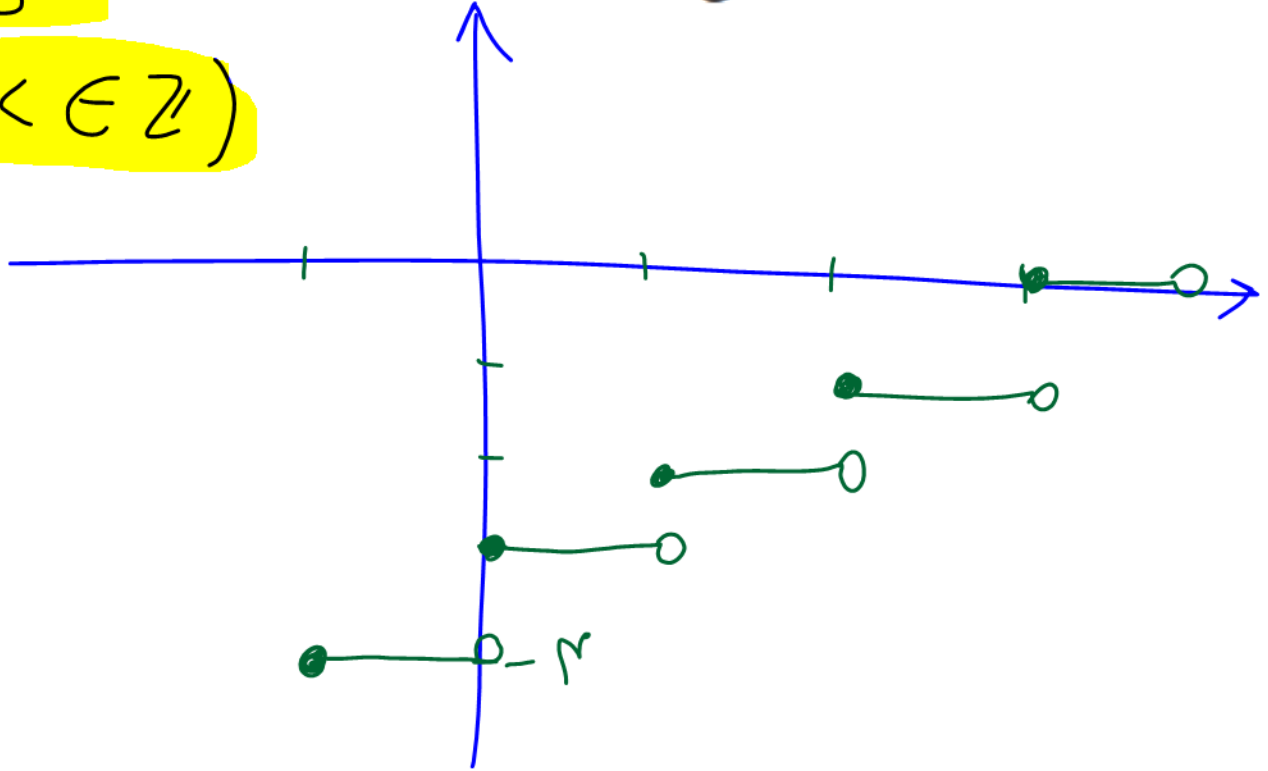
$[x + k] = [x] + k$

$(k \in \mathbb{Z})$

نمودارهای دو تابع $y = [x] - 3$ و $y = [x - 3]$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

$-1 < x < 0$
 $y = [x] - 3 = -1 - 3 = -4$
 $y = [x - 3] = -3$
 $-4 \leq x - 3 < -3$



۹ اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند

با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4 + t}$ به دست آید که در آن $t > 0$ زمان بر حسب ماه است:

$$n(8) = \frac{9500 \times 8 - 2000}{4 + 8} = 8088$$

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

$$\frac{9500t - 2000}{4 + t} = 8800$$

$$9500t - 2000 = 8800(4 + t) \rightarrow 9500t - 2000 = 35200 + 8800t \rightarrow 700t = 37200 \rightarrow t = \frac{37200}{700} = 53.14 \approx 53$$



حل تمرینات صفحه ۶۲ کتاب مسابان ۱

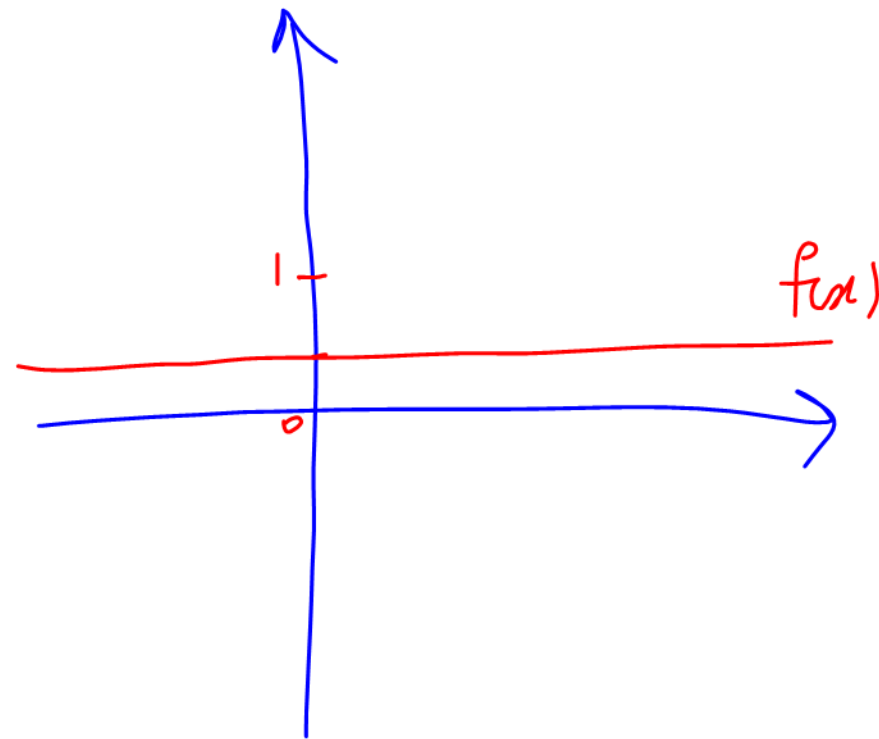
۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

تابع قد
" وزن

۲ آیا تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{2}$ است؟

$$(a, b) \in f \leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

$$(1, \frac{5}{8}) \rightarrow (\frac{2}{8}, 1)$$





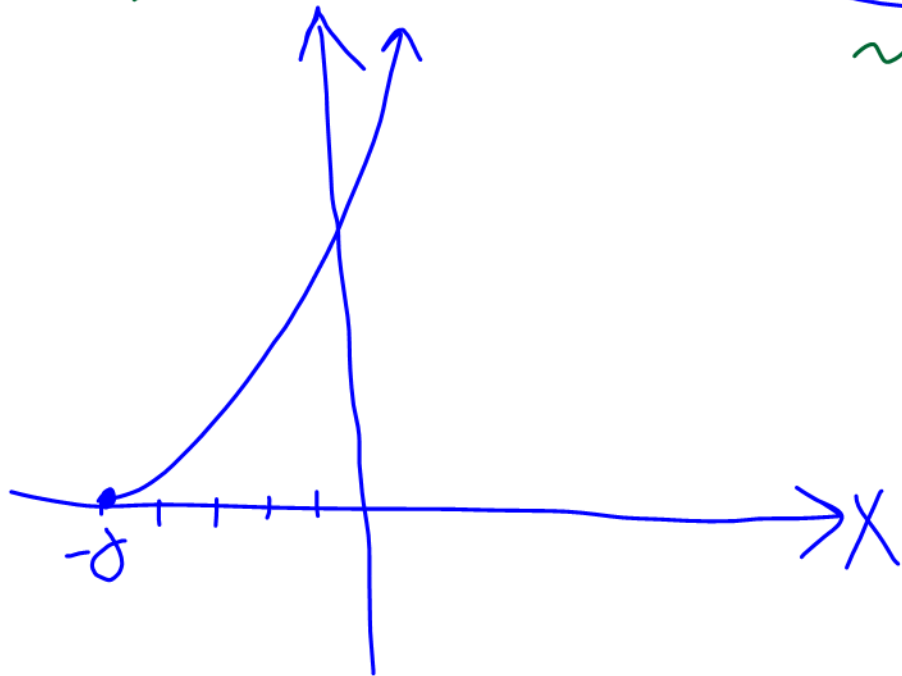
$$D_f = R_{f^{-1}}$$

$$R_{f^{-1}} = D_f$$

y

الف) $f(x) = (x + 5)^2$

$$x \geq -5$$



حل تمرینات صفحه ۶۲ کتاب مسابان۱

۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست آورید:

$$y = (x + 5)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y} = \sqrt{(x + 5)^2}$$

$$\sqrt{y} = |x + 5| \rightarrow x + 5 = \sqrt{y}$$

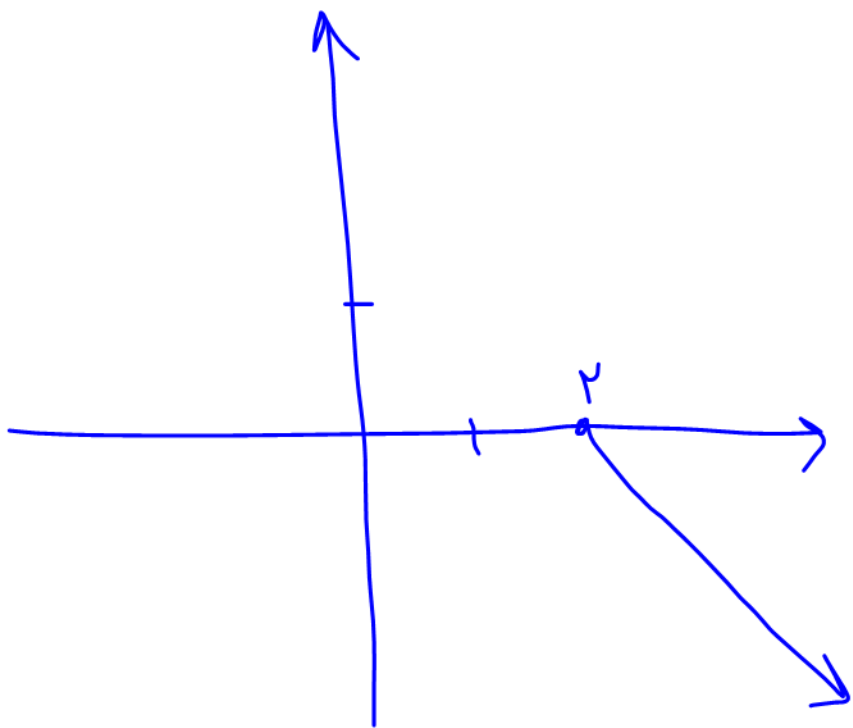
$$x = \sqrt{y} - 5 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 5$$

$$(x \geq 0)$$



AFSHAR
ACADEMY

$f(x) = -|x-1| + 1$, $x \geq 2$



حل تمرینات صفحه ۶۲ کتاب مسابان ۱

$$y = -|x-1| + 1 \rightarrow y-1 = -|x-1|$$

$$\xrightarrow{x(-1)} -(y-1) = |x-1|$$

$$-(y-1) = x-1$$

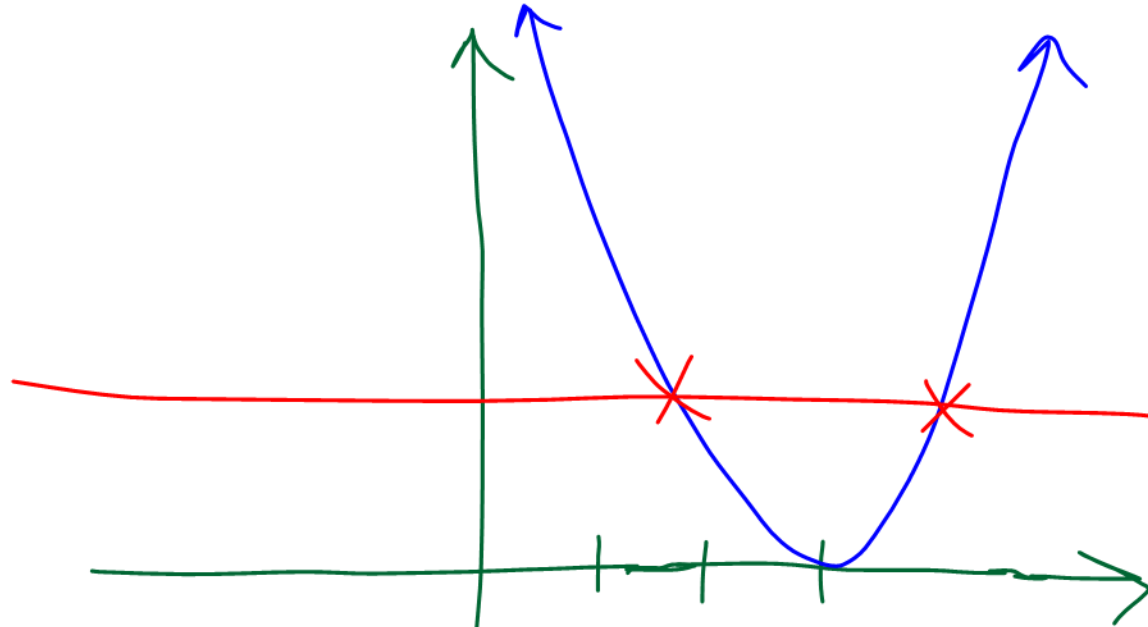
$$1-(y-1) = x$$

$$f^{-1}(x) = 1-(x-1) \quad (x \leq 0)$$



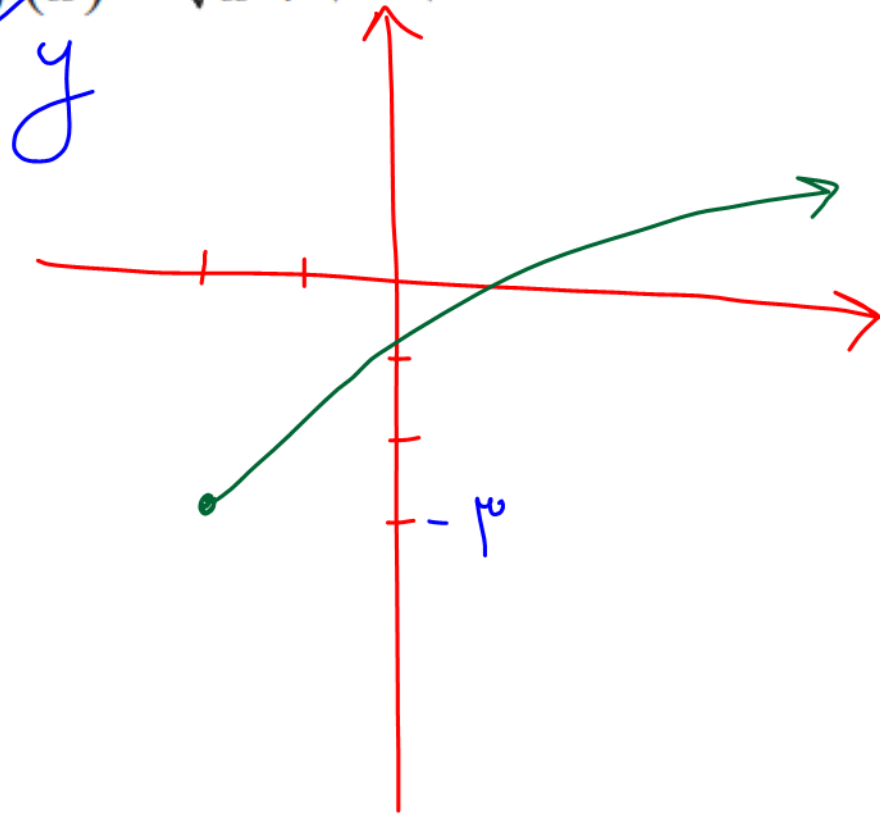
حل تمرینات صفحه ۶۲ کتاب مسابان ۱

پ) $f(x) = (x - 3)^2$



یک به یک نسبت پس وارون ندرهم نسبت

ت) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$



$$y = \sqrt{x+2} - 3$$

$$y + 3 = \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y+3)^2 = x+2$$

$$x = (y+3)^2 - 2$$

$$f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2 \quad (x > -3)$$



$$100 - 5t^2 = 0$$

$$100 = 5t^2 \rightarrow 20 = t^2 \rightarrow t = \sqrt{20}$$

حل تمرینات صفحه ۶۲ کتاب مسابان۱

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه

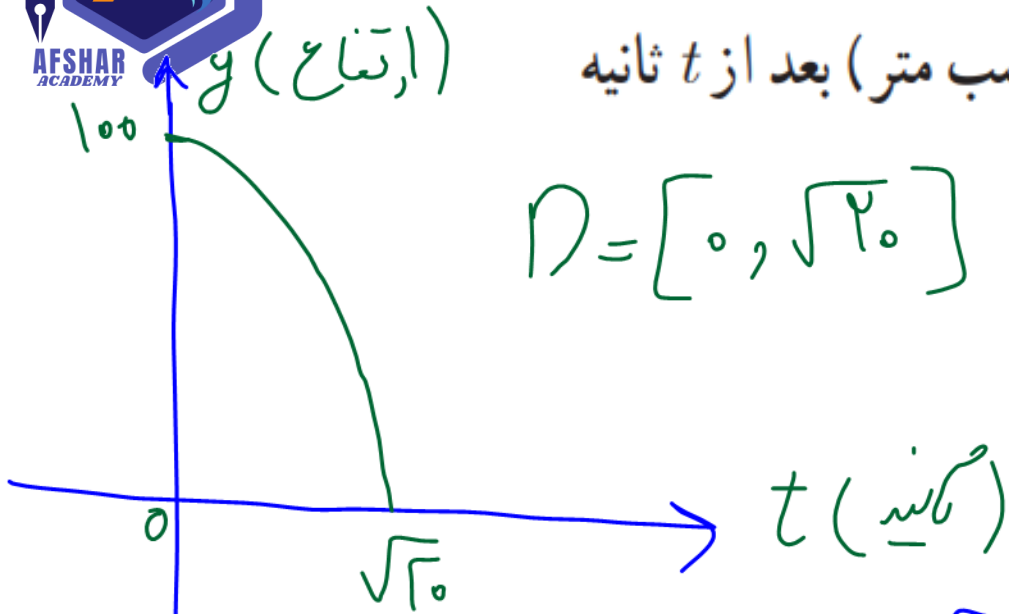
$$D = [0, \sqrt{20}] \quad R = [0, 100]$$

از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می آید.

الف) دامنه و برد h را به دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به دست آورید.



$$y = 100 - 5t^2$$

$$5t^2 = 100 - y$$

$$t^2 = \frac{1}{5}(100 - y) \rightarrow \sqrt{t^2} = \sqrt{\frac{1}{5}(100 - y)}$$

$|t|$

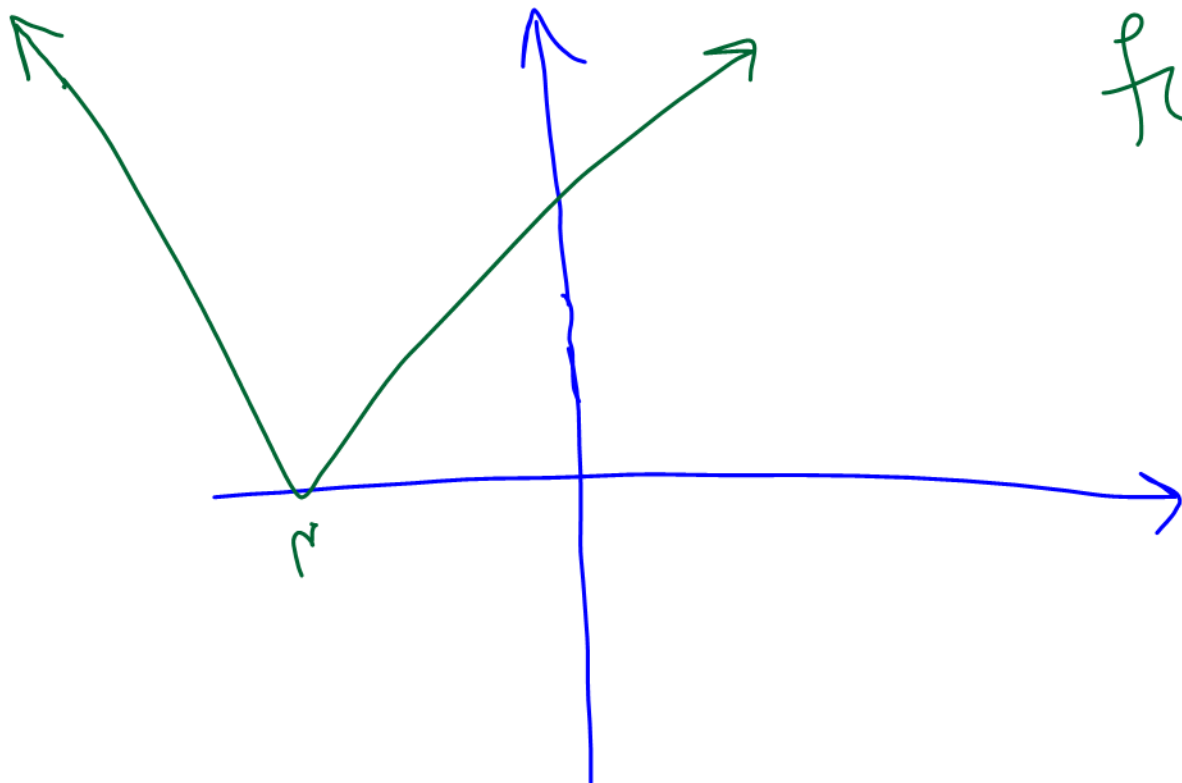
$$t = \sqrt{\frac{1}{5}(100 - y)} \rightarrow h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{1}{5}(100 - t)}$$



حل تمرینات صفحه ۶۲ کتاب مسابان ۱

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

$$f(x) = |x + 4|$$

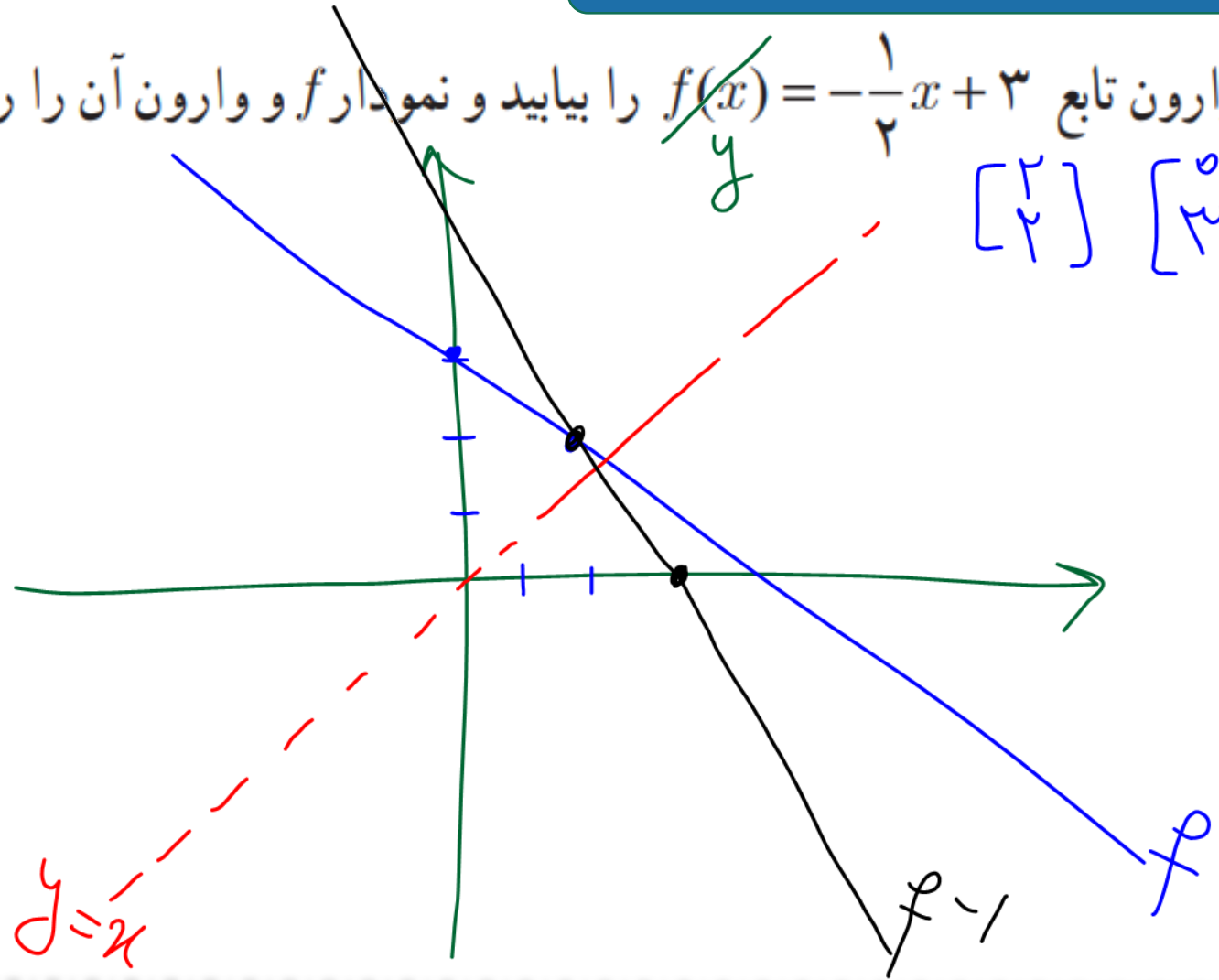




حل تمرینات صفحه ۶۲ کتاب مسابان ۱

۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\frac{1}{2}x = -y + 3$$

$$\times 2 \rightarrow x = 2(-y + 3)$$

$$f^{-1}(x) = 2(-x + 3)$$

۱ اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2 - x$ ، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f - g$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه آنها به دست آورید.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x}{2-x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 4x - (2-x) = 5x - 2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4g(x) = 4(2-x) = 8 - 4x$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2-x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \{2\}$$

۲ برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را به دست آورید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)-3} = \frac{1}{\frac{4}{x}-3}$$

$$= \frac{1}{\frac{4-3x}{x}} = \frac{x}{4-3x}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\rightarrow x \neq 0 \quad \rightarrow x \neq 3$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{4}{x} \neq 3\} = \mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$$

$$3x \neq 4 \rightarrow x \neq \frac{4}{3}$$



حل تمرینات صفحه ۷۰ - ۶۹ کتاب حسابان ۱

۳ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$f(g(7)) = f(7) = 8$$

$$\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$f(g(8)) = f(9) = 3 = g(2)$$

$$f(g(x)) = (\sqrt{x^2 - 3})^2 - 3 = x^2 - 8$$

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(fog)(4) = 35$ نادرست

ب) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آن گاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$ درست
 $g(2) = 3 \times 2 = 6$ $f(2) = 2 + 4 = 6$

پ) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(fog)(5) = g(2)$ درست
 $f(9) = \sqrt{9} = 3$ $g(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$
ت) برای هر دو تابع f و g داریم $fog = gof$ نادرست

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه $(fog)(5) = -25$ و $(fog)(x) = -x^2$ غ
 $f(g(5)) = f(\sqrt{21}) = 17$ $fg = gf$ داریم درست

۴ فرض کنیم $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ که در آن:

$$f + g = \{(1, 4), (2, 7), (3, 11), (4, 15)\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= \{(1, 4), (2, 7), (3, 11), (4, 15)\}$$

توابع $f + g$ و $g \circ f$ را به دست آورید

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in A \mid f(x) \in \mathbb{N}\} = A = \{1, 2, 3, 4\}$$



$$D_f = \{-4, -1, 0, \frac{5}{2}, 3\}$$

$$D_g = \{-4, -2, 0, 3, 5, 9\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-4, 0, 3\}$$

$$D_{f/g} = \{-4, 0\}$$

$$f+g = \{(-4, 6), (0, 2), (3, -5)\}$$

$$f-g = \{(-4, 10), (0, 8), (3, -5)\}$$

حل تمرینات صفحه ۷۰ - ۶۹ کتاب مسابان ۱

$$f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\} \text{ اگر } \color{red}{\boxed{5}}$$

$$g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\} \text{ و}$$

توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$$\frac{f}{g} = \{(-4, \frac{13}{-7}), (0, \frac{5}{-3})\}$$



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = [-2, 2]$$

حل تمرینات صفحه ۷۰ - ۶۹ کتاب حسابان ۱

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)^2 + 5} = \sqrt{4 - x^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{-2 \leq x \leq 2 \mid \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

$$4 - x^2 \geq 0 \rightarrow -x^2 \geq -4$$

$$\stackrel{x \leq 1}{\rightarrow} x^2 \leq 4 \rightarrow |x| \leq 2$$

$$\rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{4 - f(x)^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{x^2 + 5})^2} = \sqrt{4 - (x^2 + 5)} = \sqrt{-x^2 - 1}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cancel{0} \leq \sqrt{x^2 + 5} \leq 2\} = \emptyset$$

$$\rightarrow 0 \leq x^2 + 5 \leq 4 \xrightarrow{-5} -5 \leq x^2 \leq -1 \rightarrow \emptyset$$

۷ اگر $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = x + 3$ ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

اشتباه

$x = -3$

$$D_g = \mathbb{R} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$= \mathbb{R} - \{-3\}$$



$$y = 2x + 8 \rightarrow y - 8 = 2x$$

$$\div 2 \rightarrow x = \frac{y-8}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-8}{2} = \frac{1}{2}(x-8)$$

حل تمرینات صفحه ۷۰ - ۶۹ کتاب حسابان ۱

اگر $f(x) = 2x + 8$ و $f^{-1}(x)$ را به دست آورید. ⬆

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) + 8 = \cancel{2}x \frac{x-8}{\cancel{2}} + 8 = x - 8 + 8 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - 8) = \frac{1}{2}(2x + \cancel{8} - \cancel{8}) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}x = x$$

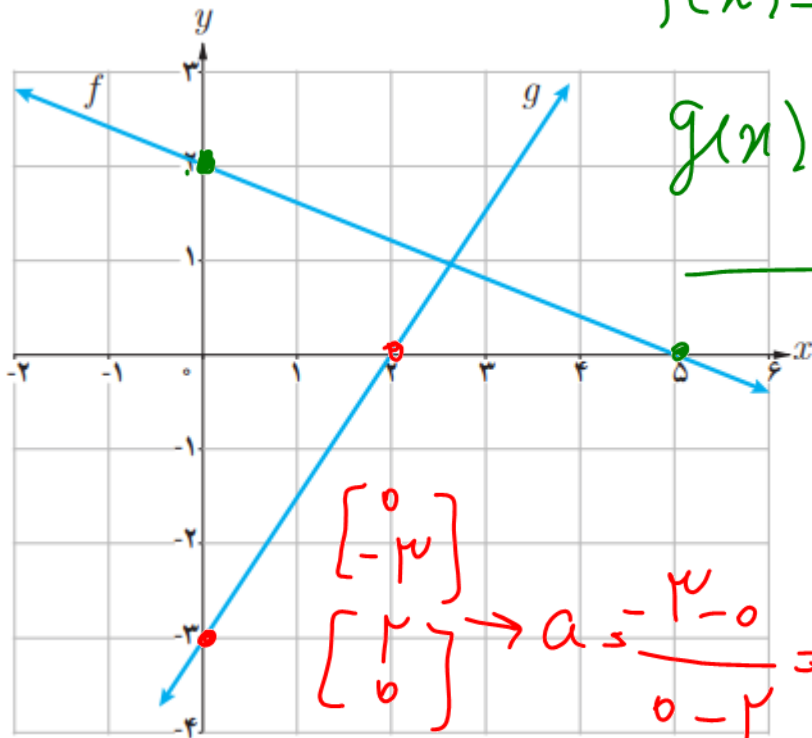
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow a = \frac{2-0}{0-8} = -\frac{2}{8}$$

حل تمرینات صفحه ۷۰ - ۶۹ کتاب مسابان

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.

$$f(x) = -\frac{2}{8}x + 2 \quad | \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$g(x) = \frac{10}{2}x - 3 \quad | \quad = -\frac{2}{8}x + 2 + \frac{10}{2}x - 3 = \frac{11}{1}x - 1$$



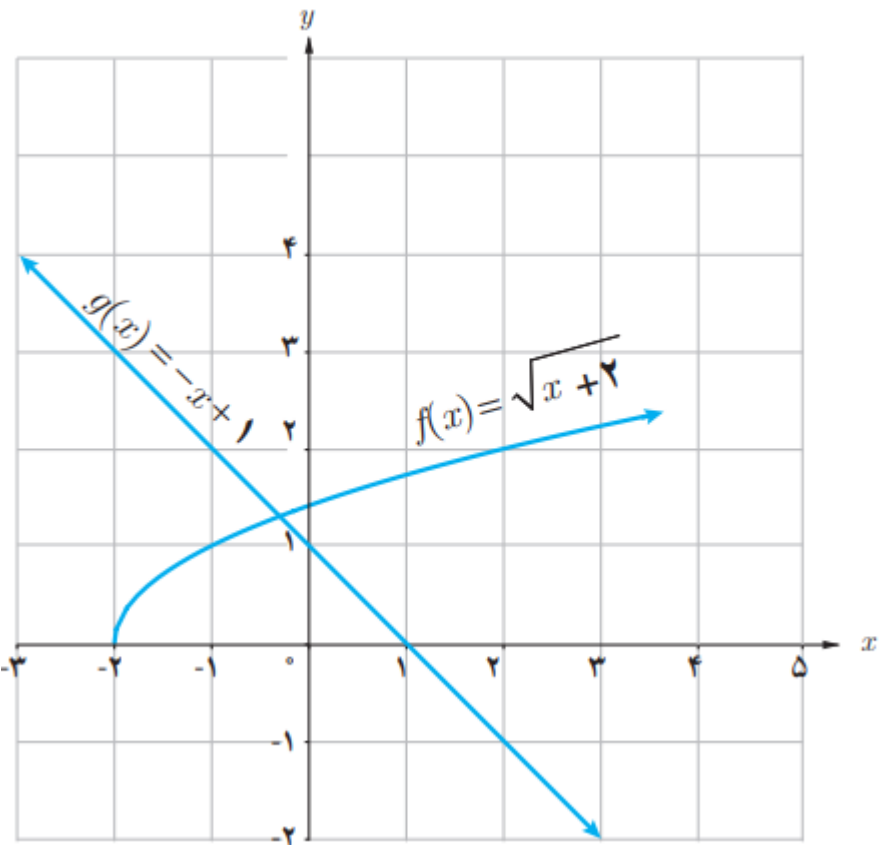
$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow a = \frac{-3-0}{0-2} = \frac{10}{2}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = -\frac{2}{8}x + 2 - \left(\frac{10}{2}x - 3\right)$$

$$= -\frac{2}{8}x + 2 - \frac{10}{2}x + 3 = -\frac{19}{1}x + 8$$

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) = \left(-\frac{2}{8}x + 2\right) \left(\frac{10}{2}x - 3\right)$$

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارات‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



$$(الف) (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 2 + (-1) = 1$$

$$(ب) (f+g)(-3) = \underbrace{f(-3)}_{\text{ت}} + \underbrace{g(-3)}_{\text{ت}} =$$

تقریباً ۵

$$(پ) (fg)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$(ت) (f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(5) = \sqrt{7}$$

$$(ث) \left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$(ج) (g \circ f)(-1) \rightarrow g(f(-1)) = g(1) = 0$$



۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.

$$y - b = ax$$

$$\div a \rightarrow \frac{y - b}{a} = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a} = \frac{1}{a}(x - b) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$



۱۲ تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - ۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند.

تابعی بنویسید که درجه سانتی گراد را به عنوان ورودی دریافت کند

و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

$$y = \frac{5}{9}(x - ۳۲)$$

$$\times \frac{9}{5} \rightarrow \frac{9}{5}y = x - ۳۲$$

$$\rightarrow \frac{9}{5}y + ۳۲ = x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + ۳۲$$



$$f(x) = \begin{cases} 10 & x=1 \\ 7 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 20 & x=1 \\ 9 & x \geq 2 \end{cases}$$

حل تمرینات صفحه ۷۰ - ۶۹ کتاب مسابان ۱

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می بینید :

یکی از این کتاب ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

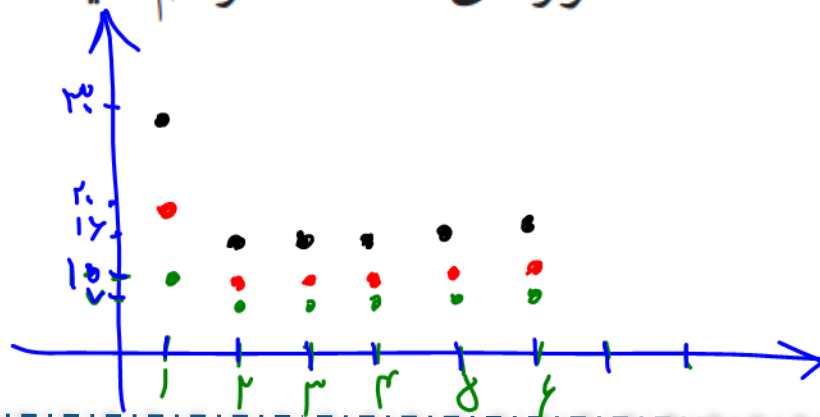
کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.

الف) تابع هایی بنویسید که تعداد نسخه های چاپ شده هر یک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهند

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 30 & x=1 \\ 16 & x \geq 2 \end{cases}$$

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.





حل تمرینات صفحه ۷۹ - ۷۷ کتاب مسابان ۱

۱. تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

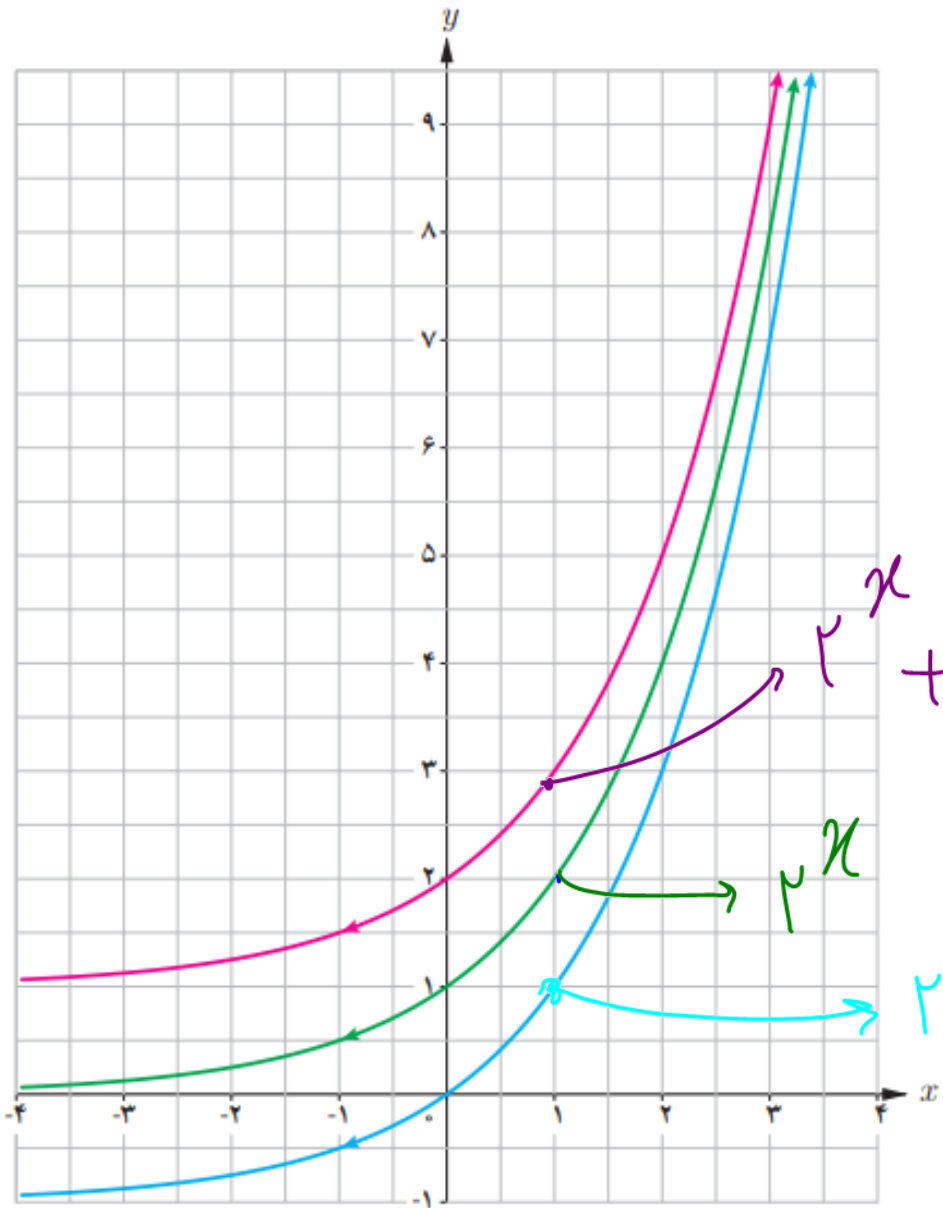
$$f(t) = 100 \times 2^t$$

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

$$f(20) = 100 \times 2^{20}$$

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

حل تمرینات صفحه ۷۹ - ۷۷ کتاب مسابان ۱



۲ نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2^x + 1$ و $y = 2^x - 1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x$ ، $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a > 1$).

نمودار تابع a^x را دو واحد بالا ببریم

که در دو واحد پایین

می‌آوریم



حل تمرینات صفحه ۷۹ - ۷۷ کتاب مسابان ۱

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10 \cdot (0.8)^t$ به دست می‌آید.

$$A(1) = 10 \cdot (0.8)^1$$

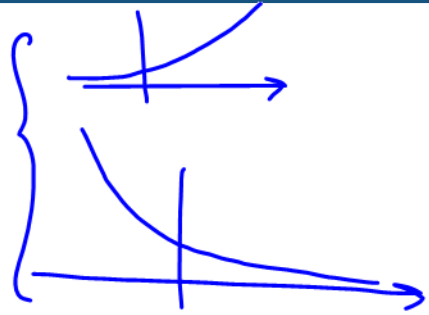
الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

$$A(1) = 10 \times (0.8)^1 = 8$$



$$y = a^x$$



$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

حل تمرینات صفحه ۷۹ - ۷۷ کتاب مسابان ۱

۴ الف) سه عدد بین اعداد $3^{\sqrt{10}}$ و $3^{2/5}$ پیدا کنید.

$$3^{2/8} < 3^{2/6} < 3^{2/4} < 3^{2/3}$$

ب) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024} = 4^{-8}$ را حل کنید.

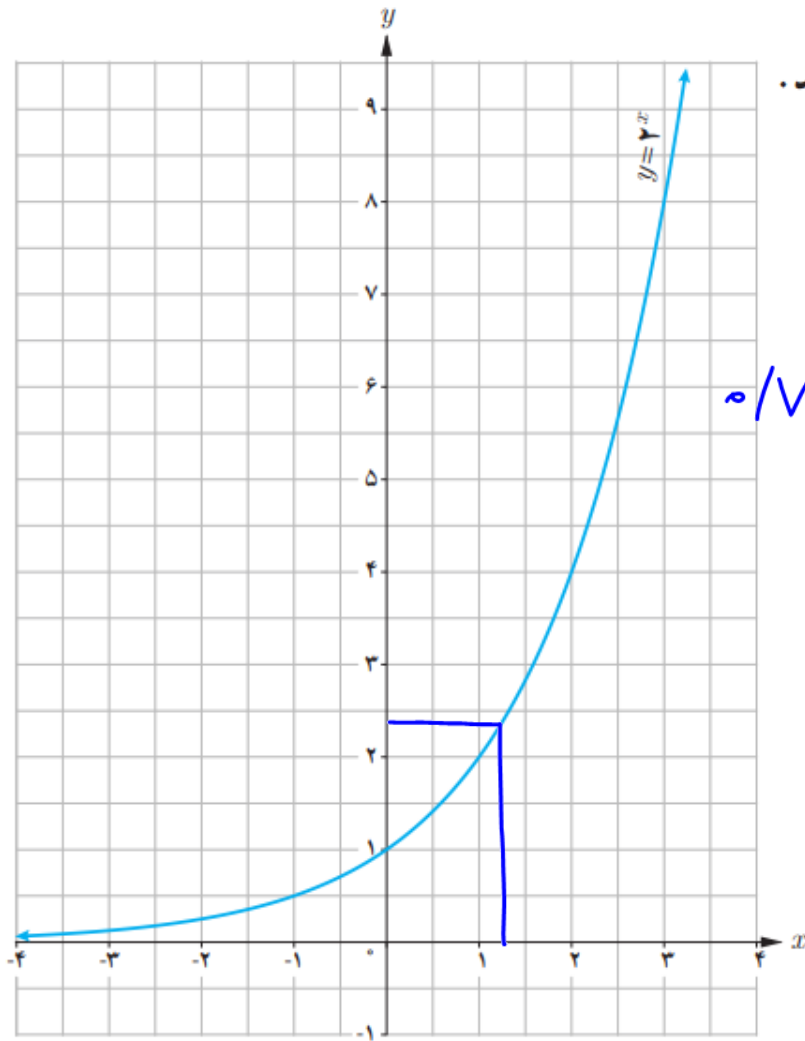
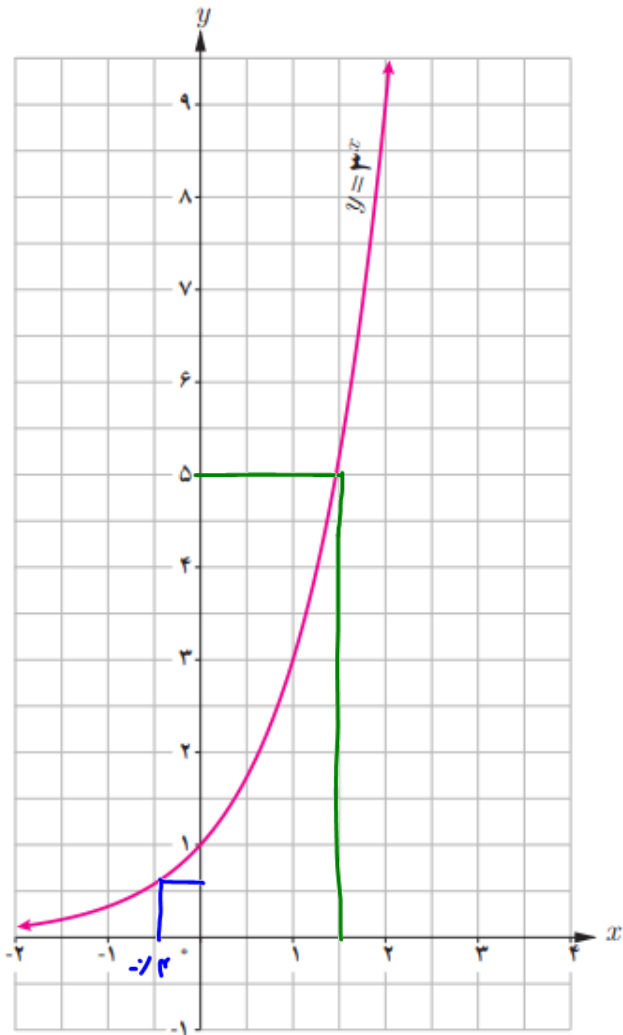
پ) اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آن گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a > 1$)

$$a^{2x-1} > a^{-8}$$

$$\rightarrow 2x-1 > -8$$

$$\rightarrow 2x > -7 \rightarrow x > -3.5$$

$$\rightarrow x > y > z$$

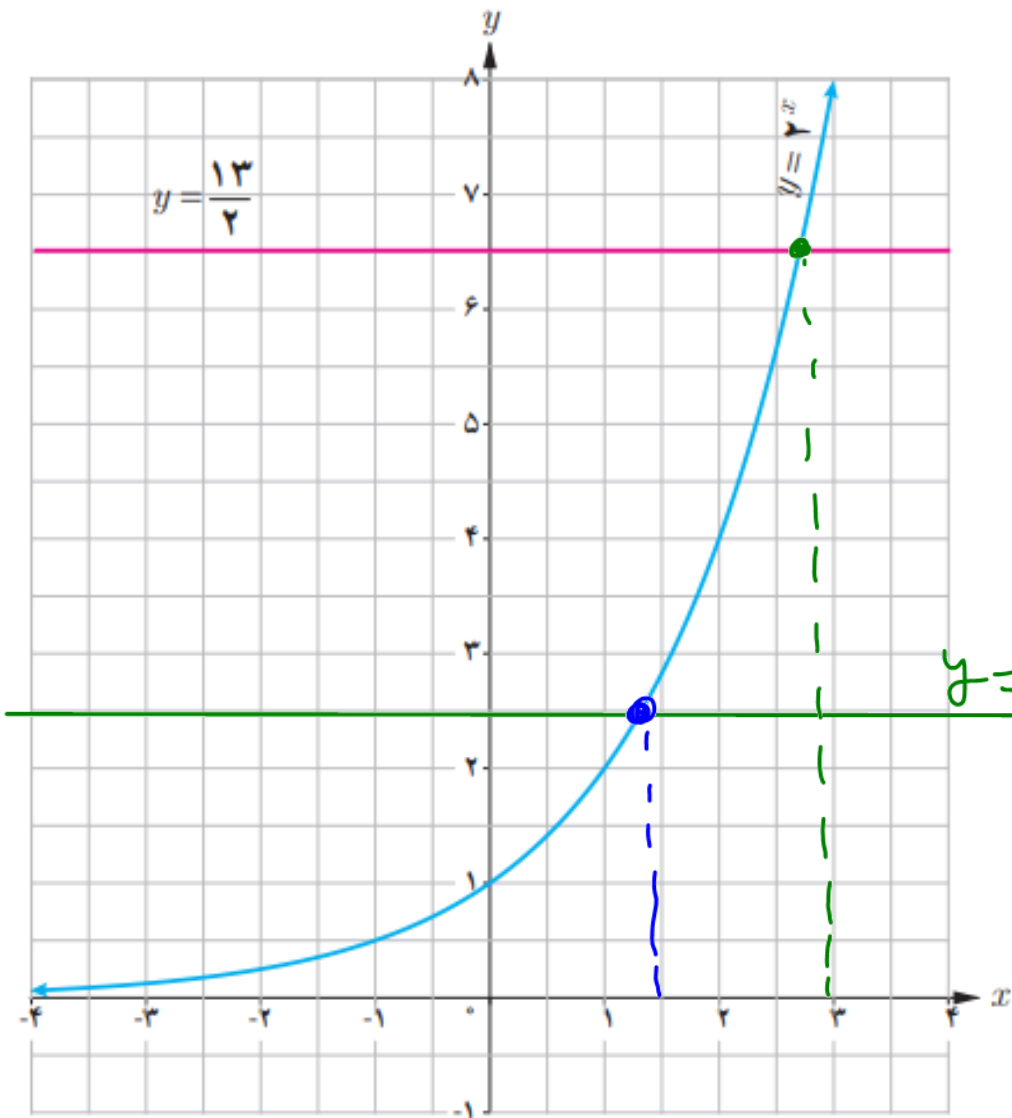


۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید.
سپس به کمک ماشین حساب،
درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } 31 - \sqrt{2} &= 31 - 1.4 = 29.6 \approx 30 \\ \text{ب) } 2^{1/25} &\approx 1.03 \\ \text{پ) } 3^{2/3} &\approx 2.08 \end{aligned}$$



حل تمرینات صفحه ۷۹ - ۷۷ کتاب مسابان ۱



۶ الف) در شکل زیر خط $y = \frac{13}{2}$ نمودار $y = 2^x$ را قطع کرده است.

طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟ $2, 3$

ب) خط $y = \sqrt{7}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط

و نمودار $y = 2^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ $1, 2$

$$2^2 < 2^x < 2^3 \quad 2^2 = 4$$

$$2 < \sqrt{7} < 3 \rightarrow 2^1 < 2^{\sqrt{7}} < 2^2$$





حل تمرینات صفحه ۷۹ - ۷۷ کتاب مسابان ۱

۷ در تصفیه آب، داخل فیلترها، لایه تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $0.7 \times 0.7 = 0.49$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

$$f(x) = (0.7)^x$$

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

$$(0.7)^x < 0.04 \rightarrow x = 10$$
$$\frac{4}{10} = \frac{4}{10} = 0.4$$

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$$\log_{10} 0.01 = (-2)$$

$$\log_6 \frac{1}{6} = (-1)$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\log_7 \sqrt[3]{7^2} = \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$a = b^c \iff \log_b a = c$$

$$1 = 2^x \iff \log_2 1 = x$$

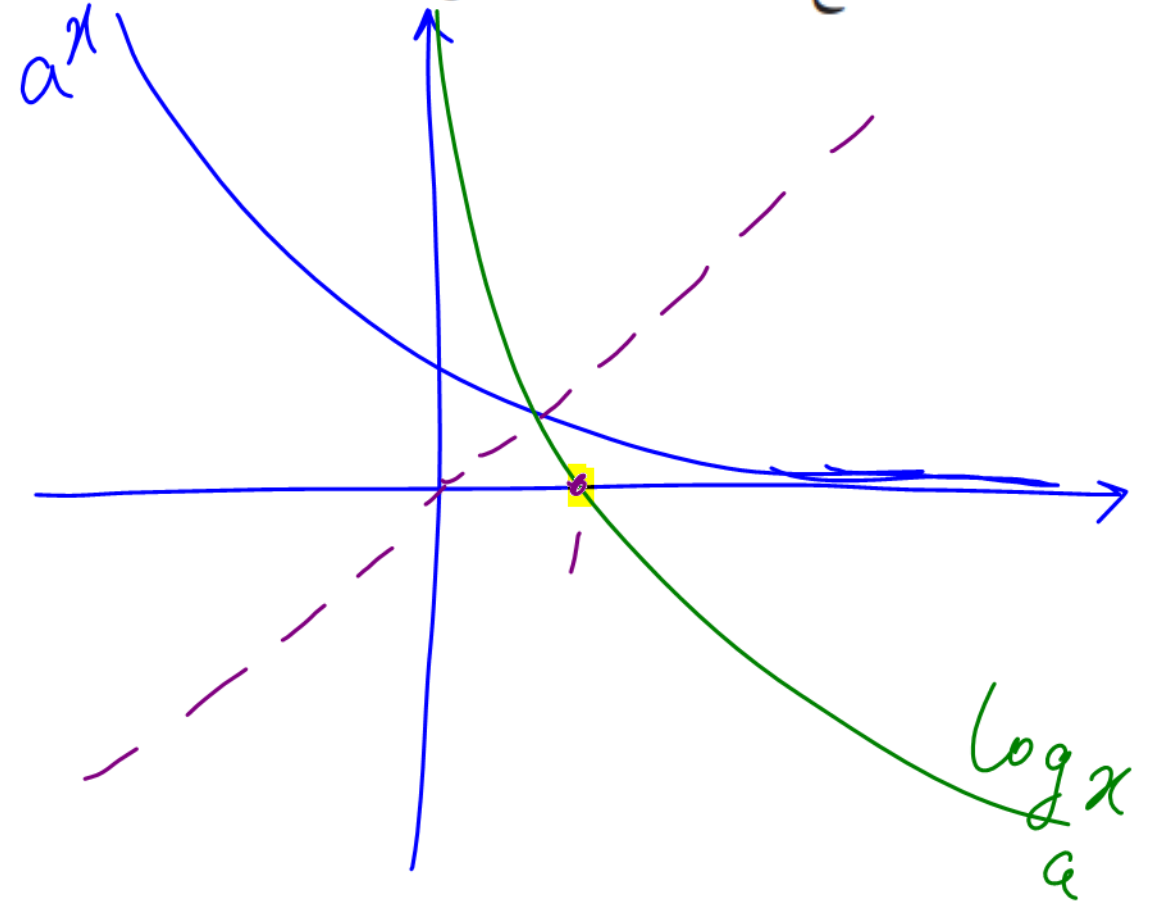
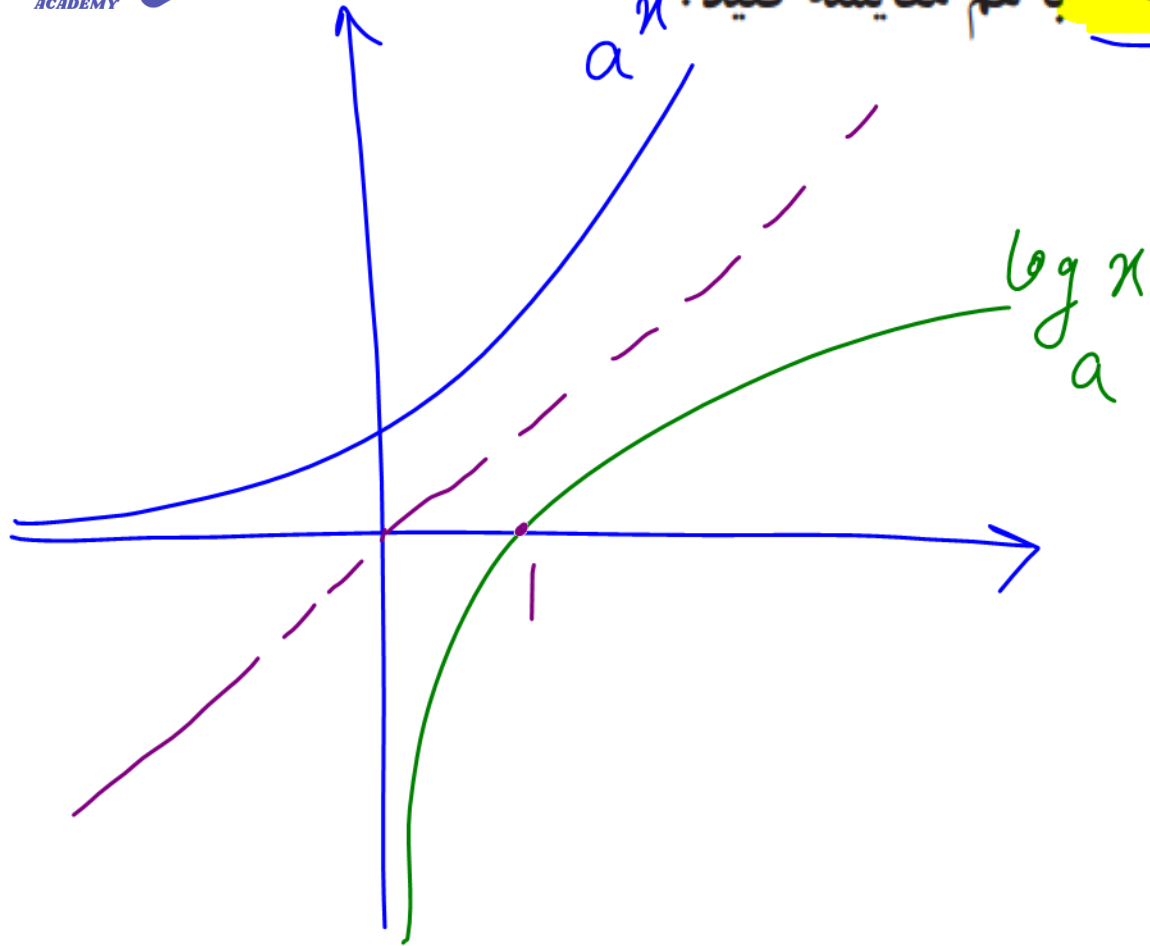
$$\log_8 28 = (2)$$



حل تمرینات صفحه ۸۵ کتاب مسابان ۱

$a > 1$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ با هم مقایسه کنید.



۳ الف) خط $y=27$ نمودار تابع $y=3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

$$3^x = 27 = 3^3 \rightarrow x = 3 \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 27 \end{bmatrix}$$

ب) خط $y=10$ نمودار تابع $y=(0.1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

$$\begin{aligned} (0.1)^x &= 10 \rightarrow (10^{-2})^x = 10 \rightarrow 10^{-2x} = 10^1 \\ \frac{1}{100} &= \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} -2x &= 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



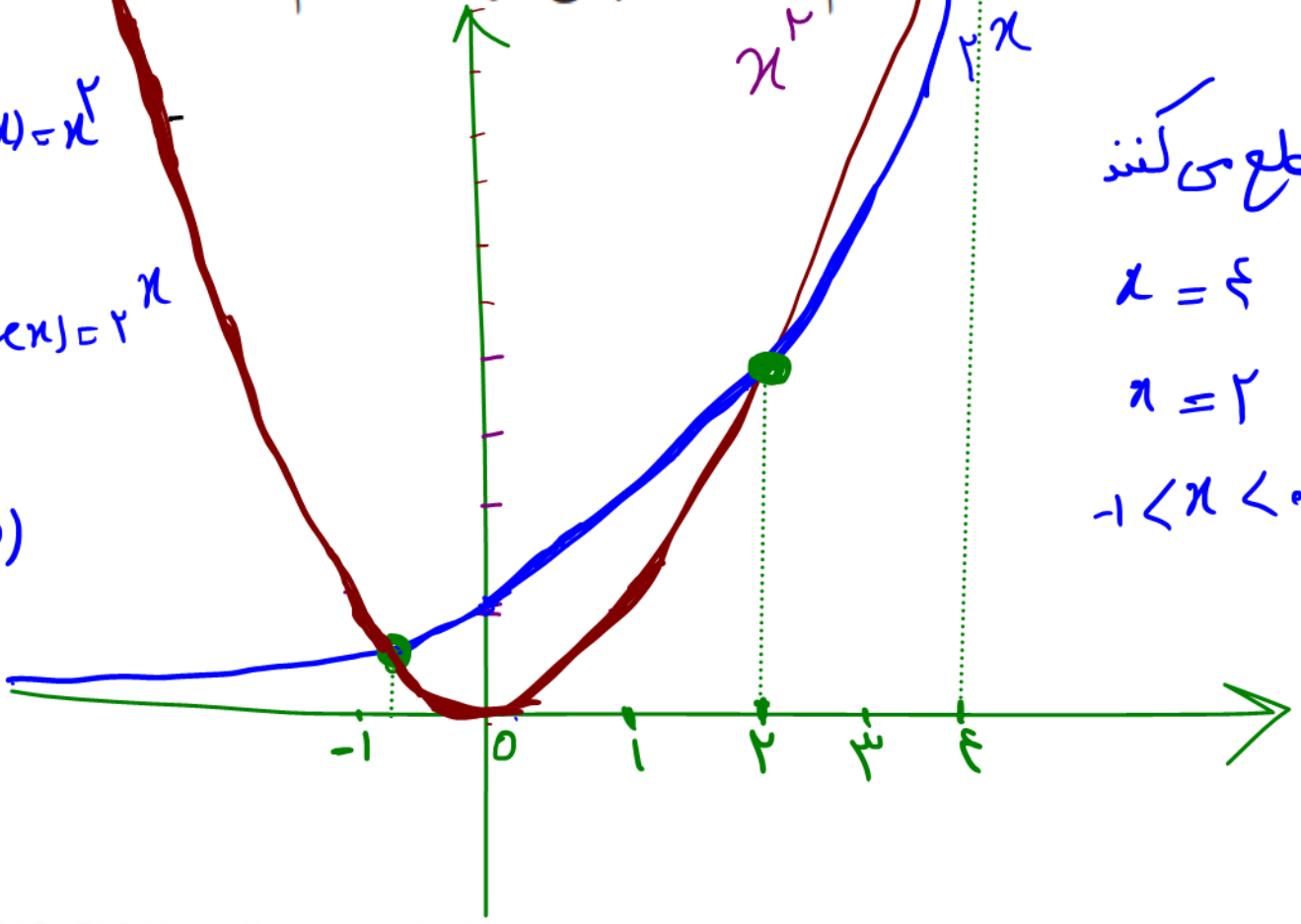
حل تمرینات صفحه ۸۵ کتاب مسابان ۱

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=2^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

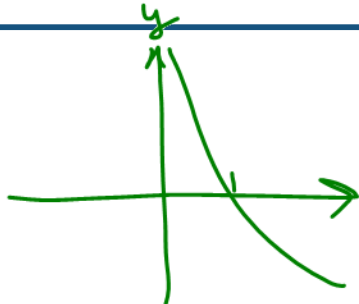
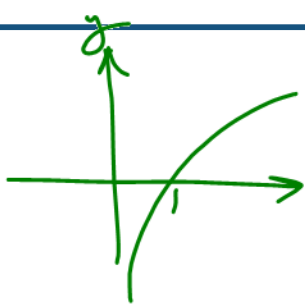
بسیار به محورهای مختصات
یک به یک نیست } $f(x)=x^2$
در هیچ نقطه‌ای محورهای مختصات را قطع نمی‌کند }
یک به یک است } $g(x)=2^x$

$D_f = \mathbb{R}$ $R_f = [0, +\infty)$

$D_g = \mathbb{R}$ $R_g = (0, +\infty)$



در سه نقطه همدیگر را قطع می‌کنند
 $x = 6$
 $x = 2$
 $-1 < x < 0$



حل تمرینات صفحه ۸۵ کتاب مسابان ۱

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

× لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

✓ لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی شود.

✓ تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است.

× تابع لگاریتم محور y ها را قطع می کند.

✓ اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d, b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد.

× اگر $a > b > 0$ آنگاه $\log_a a < \log_a b$.

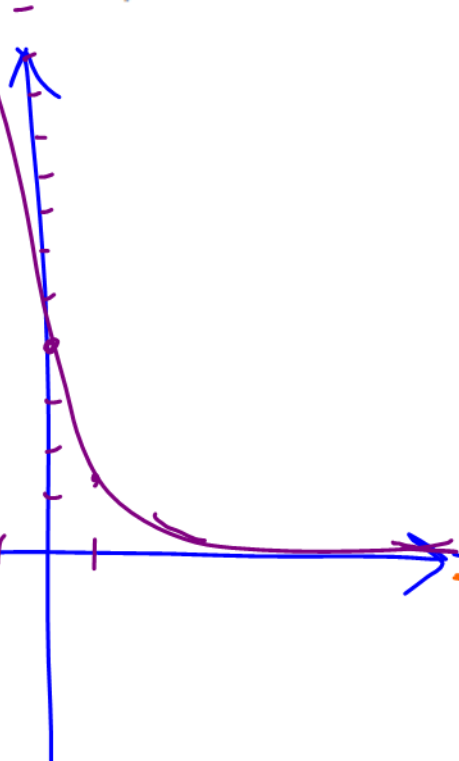


x	-1	0	1
y	12	4	$\frac{4}{3}$

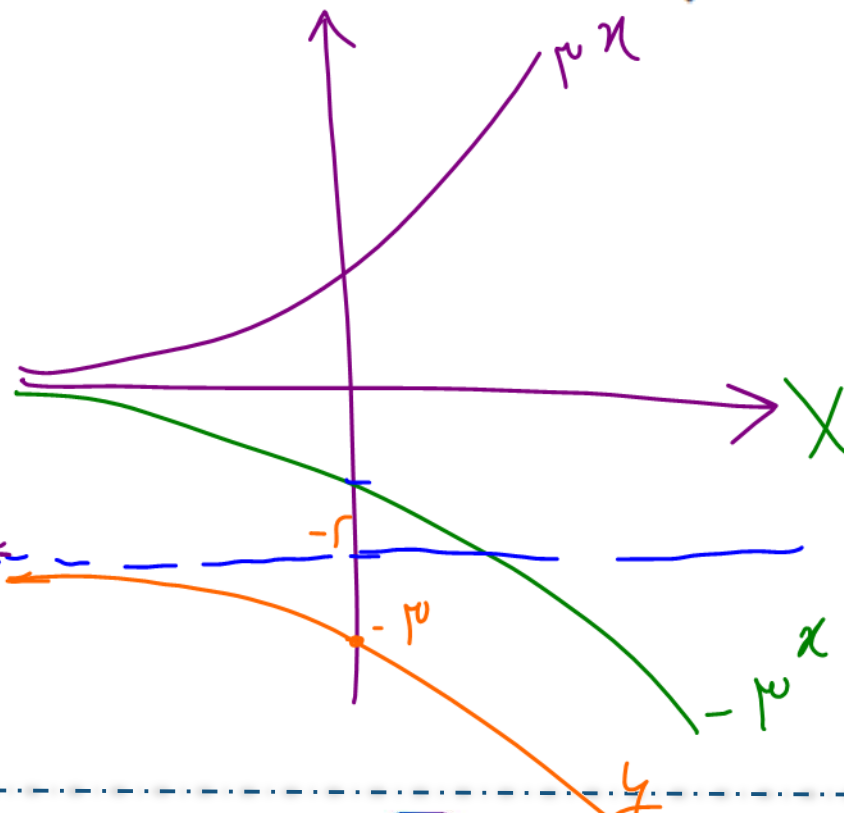
حل تمرینات صفحه ۸۵ کتاب مسابان ۱

۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

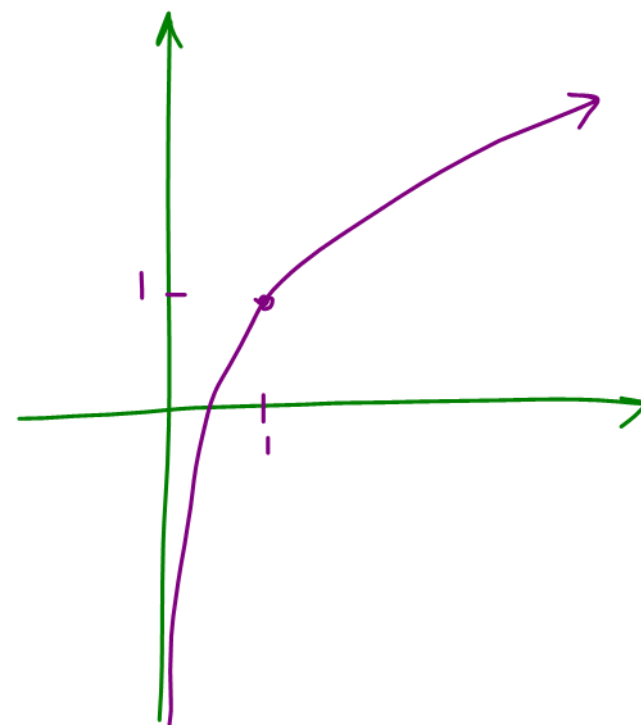
$y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (پ)



$y = -3^x - 2$ (ب)



$y = 1 + \log_3 x$ (الف)



۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$$

$$\log_4 \frac{m^2}{m} = 3 \rightarrow \log_4 m = 3 \rightarrow m = 4^3 = 64$$

$$\frac{m}{m} = 64 \rightarrow m^2 = 64m \rightarrow m^2 - 64m = 0$$

$$\rightarrow m(m - 64) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \text{ غلط} \\ m = 64 \end{cases}$$



$$\log_x \frac{x^3}{7} - 21 = -2$$

ب) $\log_r(12b - 21) - \log_r(b^2 - 3) = 2$

$$\log_r \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 2 \rightarrow \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = \frac{r^2}{1} \rightarrow r^2 b^2 - 12 = 12b - 21$$

$$(12b - 21)^2 = \underbrace{r^2}_{a} b^2 - \underbrace{12}_{b} b + \underbrace{9}_{c} = 0 \quad \Delta = (-12)^2 - 4 \times r^2 \times 9 = 144 - 36r^2 = 0$$
$$b = \frac{-(-12)}{2 \times r^2} = \frac{12}{2r^2} = \left(\frac{3}{r}\right) \text{ غ ق و}$$

$$\text{پ) } \log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 1) = -1 \rightarrow x^2 - 1 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

$$x^2 - 1 = 10$$

$$x^2 = 11$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{11} \quad \checkmark \\ x = -\sqrt{11} \quad \checkmark \end{cases}$$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

$$y = \log_2 t$$

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ ، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟ $\log_2 2 \approx 0.301$

$$\log_2 5000 = \log_2 \frac{10000}{2} = \log_2 10^4 - \log_2 2 = 4 \log_2 10 - 1 = \frac{4}{\log_{10} 2} - 1 = \frac{4}{0.301} - 1 \approx 12.28$$



حل تمرینات صفحه ۹۰ کتاب مسابان۱

۳ درست یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید :

الف) $a^{\log_b a} = a$ (ب) $(b \neq 1, a, b > 0)$ نادرست

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c$ (ب) $(d \neq 1, a, b, c, d > 0)$ درست

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$ نادرست

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است. نادرست



حل تمرینات صفحه ۹۰ کتاب مسابان

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است. t نیمه عمر

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می ماند، بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۱٪ گرم کاهش می یابد؟

جرم اولیه $m(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

جرم باقی مانده پس از t

$\frac{1}{100} = 0.01 = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$

$10^{-2} = (2^{-1})^{\frac{t}{4}}$

$10^{-2} = 2^{-\frac{t}{4}} \rightarrow \log_{10} 10^{-2} = -\frac{t}{4} \log_{10} 2$

$-2 \log_{10} 10 = -\frac{t}{4} \times (-0.3) \rightarrow \log_{10} 10 = \frac{t}{2}$

$\frac{1}{\log_{10} 2} = t \rightarrow \frac{1}{0.301} = t \rightarrow t \approx 24.87$



$$\log 8 = 1 - \log 2 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

حل تمرینات صفحه ۹۰ کتاب مسابان

عبارات زیر را ساده کنید. $(\log 3 \approx 0.4771, \log 2 \approx 0.301)$

$$2^2 \times 3^3 \times 8^3$$

(الف) $\log(18 \times 375) = \log 2^2 \times 3^3 \times 8^3 = \log 2^2 + 3 \log 3 + 3 \log 8$

(ب) $\log \sqrt{0.175} = \log \left(\frac{175}{1000}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{175}{1000}$
 $= \frac{1}{2} (\log 175 - 2 \log 10) = \frac{1}{2} (0.2430 - 2 \times 1)$
 $= -0.8785$

(پ) $\log_2 \frac{\sqrt{18}}{\sqrt[4]{2}}$
 $= \log_2 \sqrt{2^3} - \log_2 \sqrt[4]{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} - \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} (\log_2 2) - \frac{1}{4} (\log_2 2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

۶ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{2}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \rightarrow \log_a \frac{1}{2} = -4 \rightarrow \frac{1}{2} = a^{-4}$$

$$a = 2^{-1} = 2^{\frac{1}{4}} \rightarrow a = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$



حل تمرینات صفحه ۹۰ کتاب حسابان ۱

گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

$$\log 5 = \log 3 + \log 2 \quad \times$$

Handwritten note: ۳+۲

$$\log_b a \times \log_a b = 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{\log_b a} \times \log_a b = 1$$



حل تمرینات صفحه ۹۰ کتاب مسابان ۱

۸ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای 30 سال است. نمونه‌ای از این ماده 128 میلی‌گرم جرم دارد. جرم اولیه

جرمی که پس از 300 سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$$m(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$m(300) = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{300}{30}} = 2^7 \times \left(2^{-1}\right)^{10} = 2^7 \times 2^{-10} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

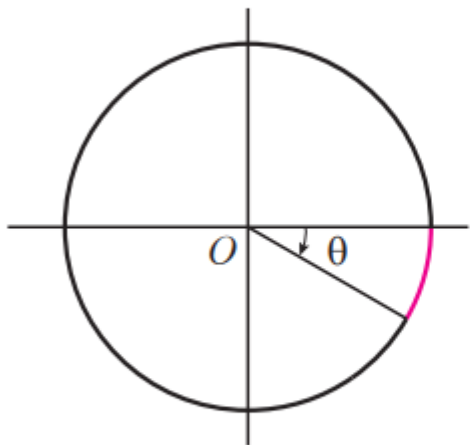


$$\text{رادین} \rightarrow \frac{\pi}{180} \times \text{درجه}$$

$$\text{درجه} \xrightarrow{\pi=180} \text{رادین}$$

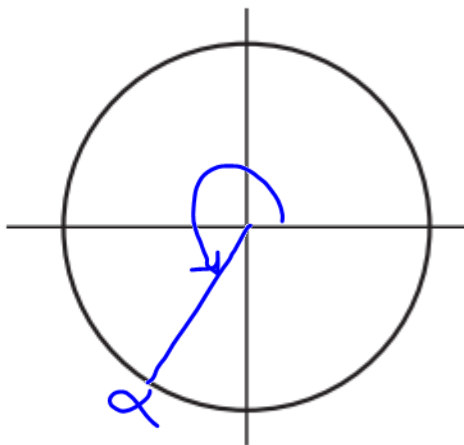
حل تمرینات صفحه ۹۶ کتاب مسابان ۱

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



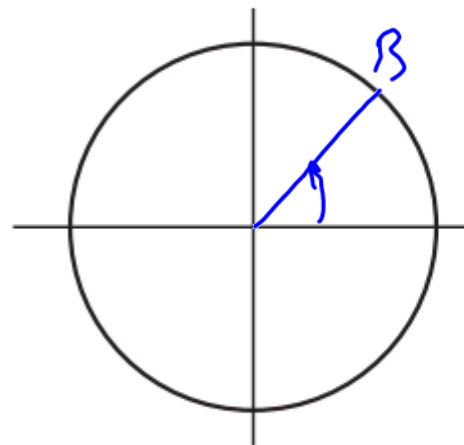
$$\theta = -\frac{\pi}{6} = -\frac{180}{6} = -30^\circ$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



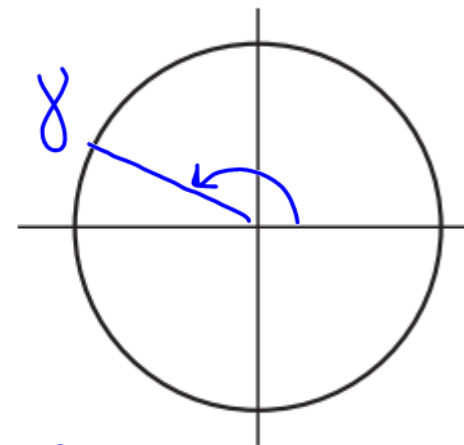
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = 180 + \frac{180}{3} = 240^\circ$$

انتهای کمان در ربع سوم است.



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 90 - 45 = 45^\circ$$

انتهای کمان در ربع اول است.



$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} = 180 - 30 = 150^\circ$$

انتهای کمان در ربع دوم است.



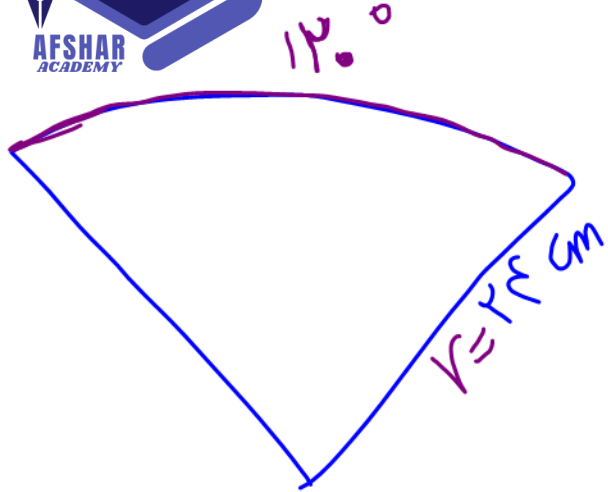
حل تمرینات صفحه ۹۶ کتاب مسابان ۱

۲ طول برف پاک کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی متر است.

فرض کنید برف پاک کن، کمانی به اندازه 120° طی می کند. ($\pi \approx 3/14$)

الف) اندازه کمان را بر حسب رادیان به دست آورید.

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی متر است؟



$$\cancel{120}^\circ \times \frac{\pi}{\cancel{180}^\circ} = \frac{2\pi}{3} = \theta$$

رادیان

زاویه بر حسب

$$\theta = \frac{L}{r}$$

طول کمان



$$L = r\theta$$

سُباع
دایره

$$= 24 \times \frac{2\pi}{3} = 80,24 \text{ cm}$$

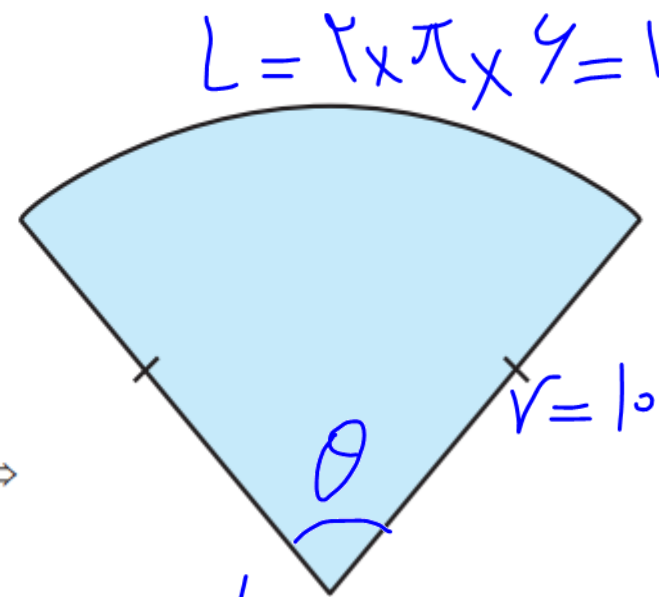
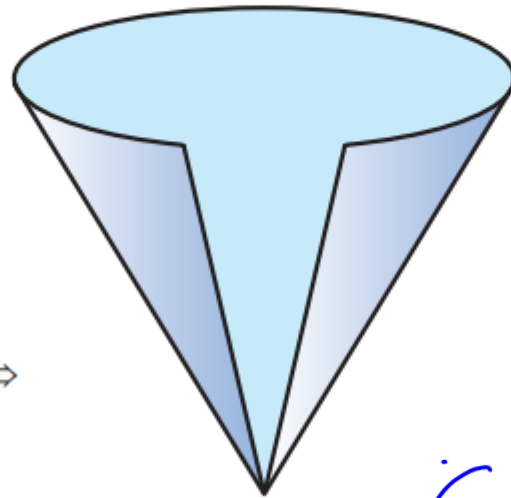
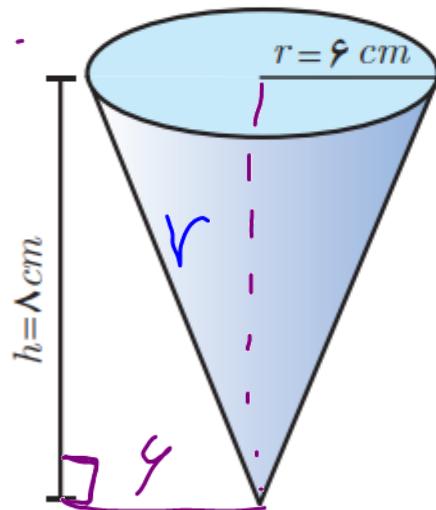
۳ شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r=6\text{ cm}$ و ارتفاع آن $h=8\text{ cm}$ می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

$$r^2 = 6^2 + 8^2$$

$$= 36 + 64$$

$$= 100$$

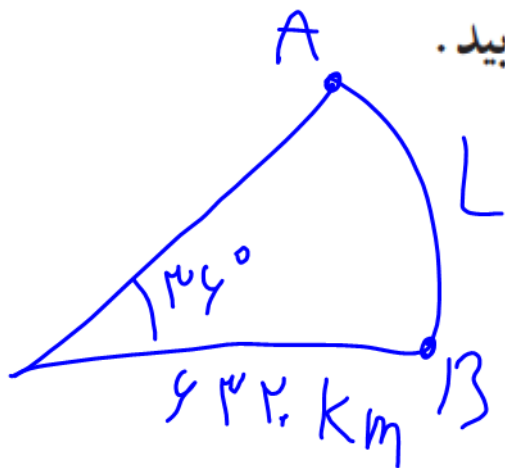
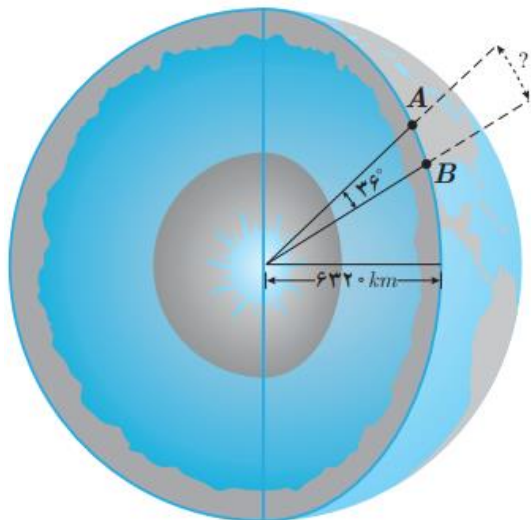
$$r = 10$$



$$L = 2 \times \pi \times 6 = 12\pi$$

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5}$$

۴ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.



$$L = r \theta \rightarrow \text{رادین}$$

$$= 6370 \times \frac{\pi}{8} = 2491,94$$

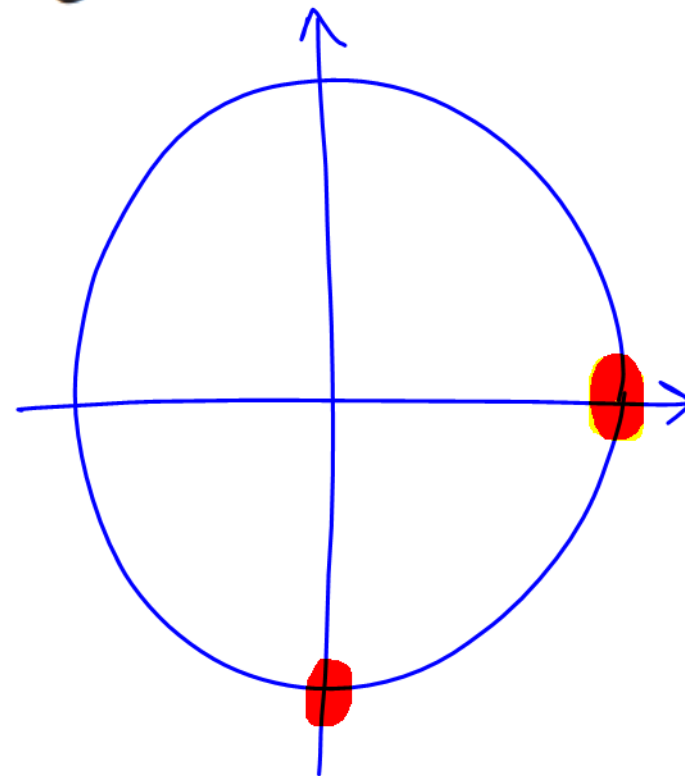
$$\theta = \cancel{136} \times \frac{\pi}{\cancel{180}} = \frac{\pi}{8}$$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \sin(300^\circ) = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب) } \cot(75^\circ) = \cot(\cancel{180^\circ} + 15^\circ) = \cot 15^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{پ) } \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





$$۱۴۰ = \cancel{۱۲} \times \cancel{۳} + ۱۲$$

حل تمرینات صفحه ۱۰۴ کتاب مسابان ۱

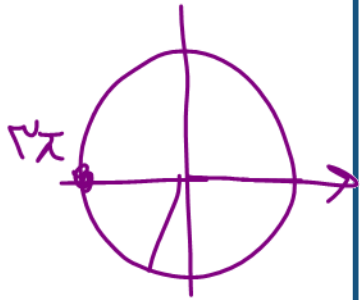
$$\text{ت) } \cos\left(-\frac{۲۳\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۳\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۲\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۱\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۰\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۹\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۸\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۷\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۶\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۵\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۴\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۳\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۲\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۱\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۱۰\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۹\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۸\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۷\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۶\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۵\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۴\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۳\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{\pi - \pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{0}{۴}\right) = \cos(0) = 1$$

$$\text{ث) } \sin\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) = \sin\left(\frac{۵\pi + \pi}{۴}\right) = \sin\left(\frac{۶\pi}{۴}\right) = \sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -1$$

$$\text{ج) } \tan(-۱۴^\circ) = -\tan(۱۴^\circ) = -\tan(۱۸^\circ - 4^\circ) = -(-\tan 4^\circ) = \tan 4^\circ = \sqrt{۳}$$

$$\text{ج) } \tan(-15^\circ) = -\tan(180^\circ - 30^\circ) = -(-\tan 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ح) } \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{1\pi + \pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



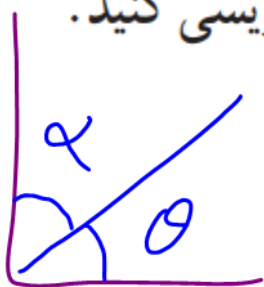
$$\text{خ) } \tan\left(\frac{1^\circ\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{9\pi + \pi}{2}\right) = \tan\left(5\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می دهد.

$$I = k \sin \theta = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

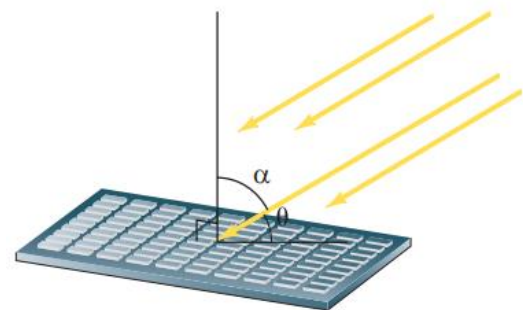
الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.



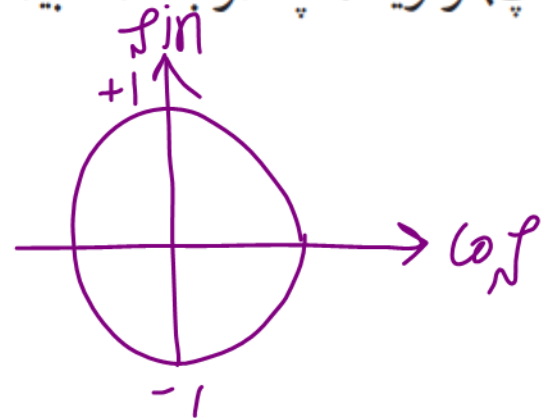
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

ب) شدت نور را برای زاویه های $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).



$$I = k \sin \theta = \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow I = k \times 0 = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow I = k \times \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = k \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} k \end{cases}$$





۳ درست یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا بر حسب رادیان است).

$$\underline{-\cos \theta}$$

الف) $\cos \theta + \cos (\pi - \theta) = 0$ ✓

ب) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos \theta = 1$ $+ \cos \theta + \cos \theta \neq 1$ ✗

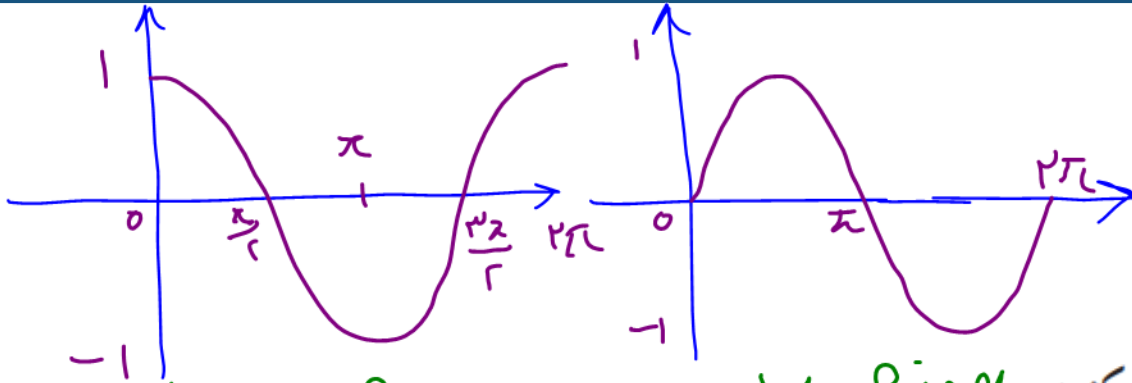
ج) $\cos (\gamma) = \cos (-\gamma)$ ✓

د) $\tan (\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

$$-\tan \theta = 0 - \tan \theta$$
 ✓



AFSHAR
ACADEMY



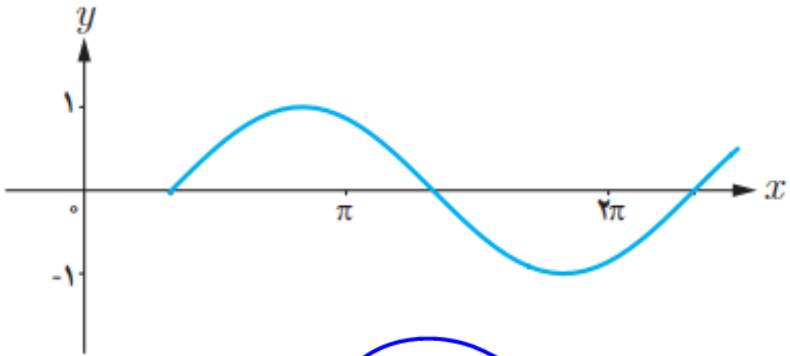
$$y = \cos x$$

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید. $y = \sin x$

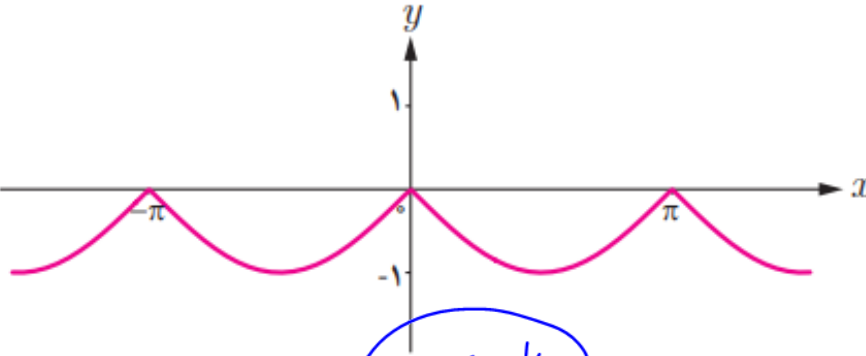
$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (پ)}$$

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (ب)}$$

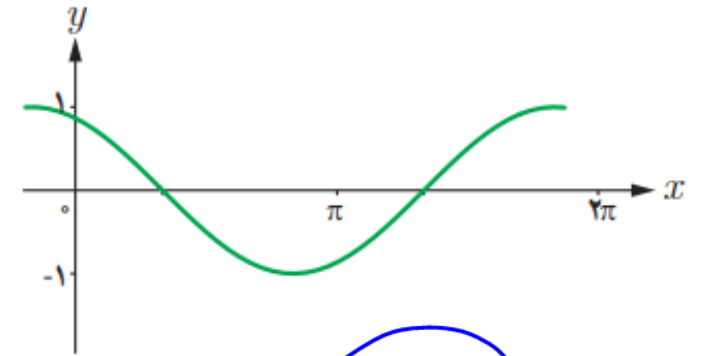
$$y = -|\sin x| \text{ (الف)}$$



پ



الف



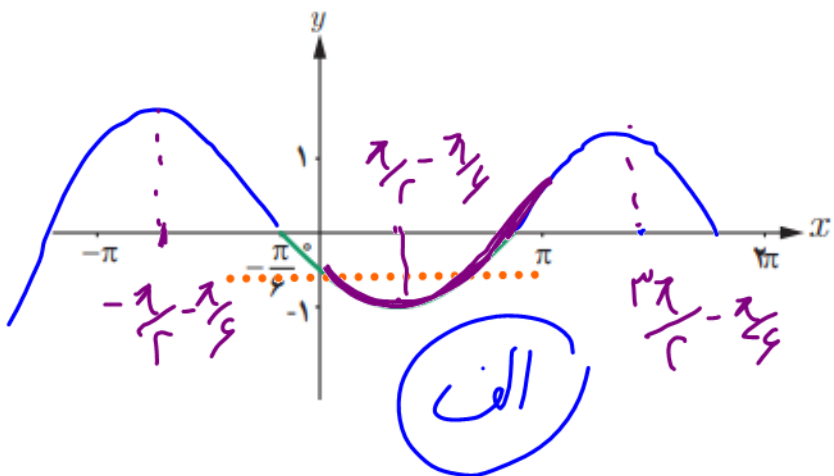
ب



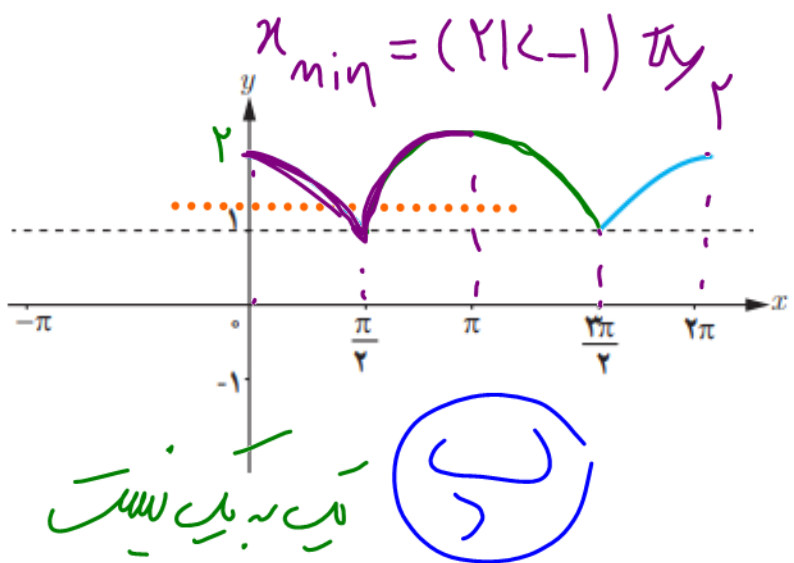
حل تمرینات صفحه ۱۰۹ کتاب مسابان ۱

۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

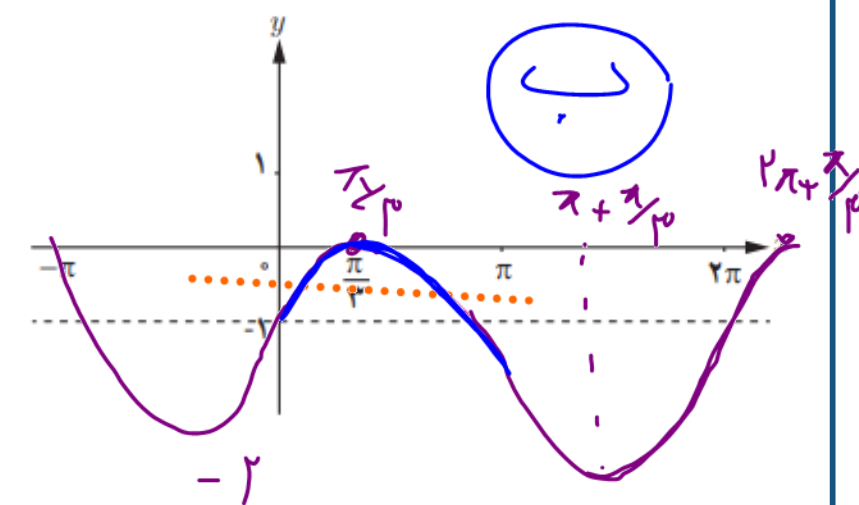
X $y = 1 + |\cos x|$ (پ)



$y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ (ب) $x_{max} = \pi$ $(K \in \mathbb{Z})$



الف $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$
یک به یک نیست





حل تمرینات صفحه ۱۰۹ کتاب مسابان ۱

۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲،

بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می دهد؟



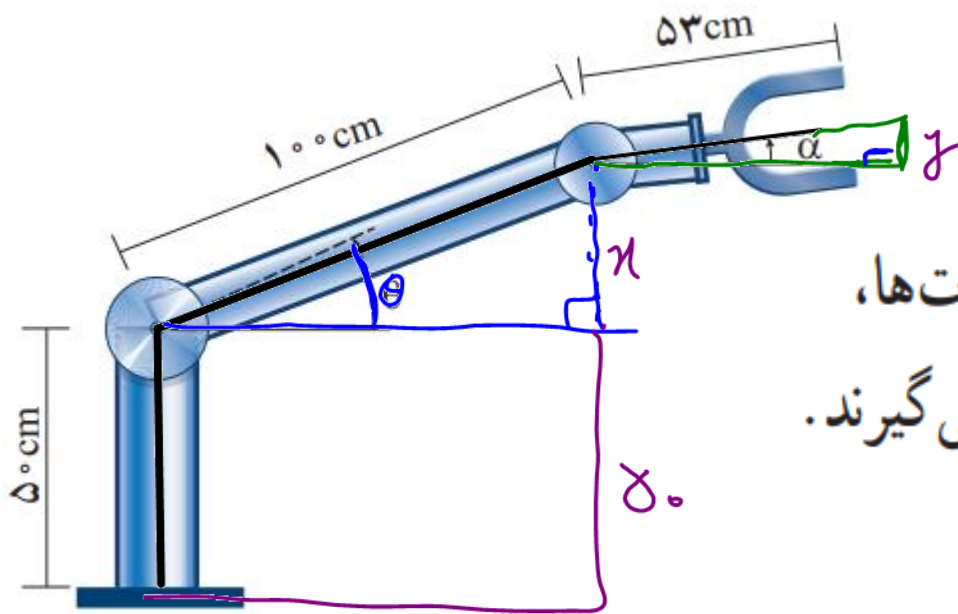
حل تمرینات صفحه ۱۰۹ کتاب مسابان ۱

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲،

کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟



حل تمرینات صفحه ۱۰۹ کتاب مسابان ۱



۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

$$\sin \theta = \frac{x}{100} \rightarrow x = 100 \sin \theta$$

$$h = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{53} \rightarrow y = 53 \sin \alpha$$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع h $23/5 \text{ cm}$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -3^\circ$ قرار داده است.

تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

$$h = \delta_0 + 100 \sin \theta + \delta^2 \sin \alpha$$

$$23,5 = \delta_0 + 100 \sin \theta + \delta^2 \sin(-3)$$

$$\cancel{23,5} = \cancel{\delta_0} + 100 \sin \theta + \underbrace{\delta^2 \sin(-3)}_{\times -1/2} \rightarrow 100 \sin \theta = 0$$



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

حل تمرینات صفحه ۱۱۲ کتاب مسابان

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ب) } \tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ت) } \sin 12^\circ = \sin (9^\circ + 3^\circ) = \sin 9^\circ \cos 3^\circ + \sin 3^\circ \cos 9^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ث) } \cos 135^\circ &= \cos (90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ \\ &= 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



$$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \frac{16}{28}} = \sqrt{\frac{9}{28}} = \frac{3}{\sqrt{28}}$$

$$\sin \beta = +\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

۲ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد.

حل تمرینات صفحه ۱۱۲ کتاب مسابان ۱

اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{28}} \times \frac{-12}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{-36 + 20}{68} = \frac{-16}{68}$$

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{-12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-48 + 15}{65} = \frac{-33}{65}$$

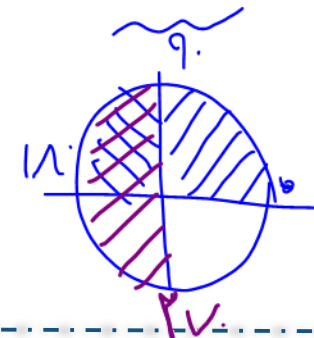
$$0 < \alpha < 90$$

$$90 < \beta < 180$$

$$\frac{90 < \alpha + \beta < 270}{\oplus}$$

$$\sin(\alpha + \beta) < 0$$

ربع سوم



۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

الف) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

حل تمرینات صفحه ۱۱۲ کتاب مسابان ۱

$$\text{پ) } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\text{ت) } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$



$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

حل تمرینات صفحه ۱۱۲ کتاب مسابان ۱

۴ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

$$\sin^2(22,5) = \frac{1 - \cos(45)}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(22,5) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2(22,5) = \frac{1 + \cos(45)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

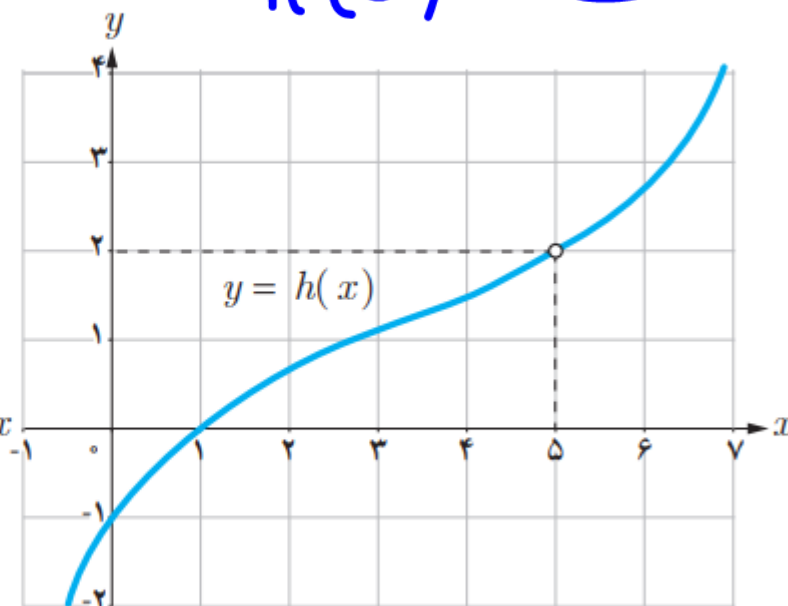
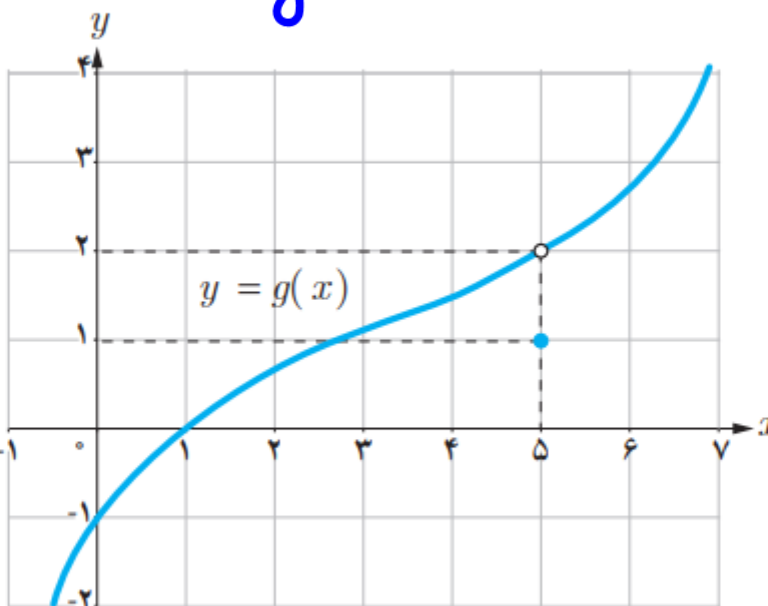
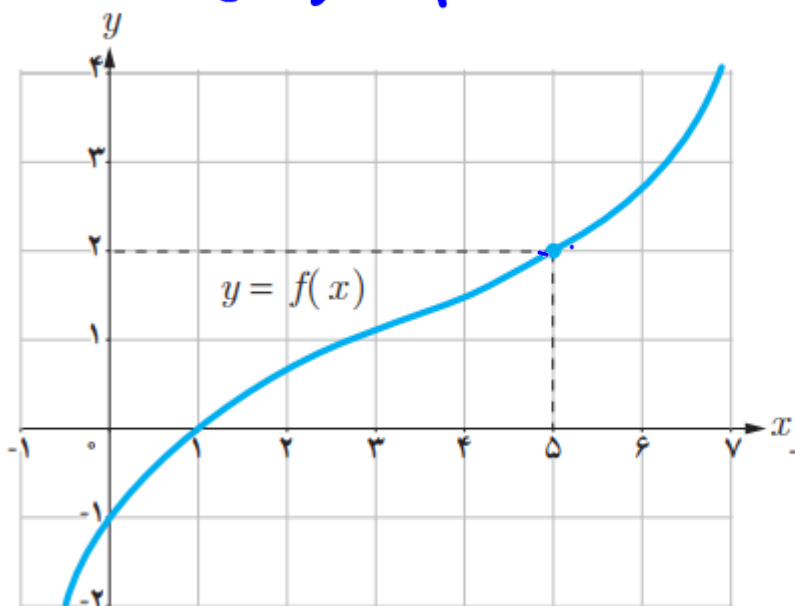
$$\cos(22,5) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

۱ نمودار سه تابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطه $x=5$ مشخص کنید.

$$f(5) = 2$$

$$g(5) = 1$$

$$h(5) = 2$$

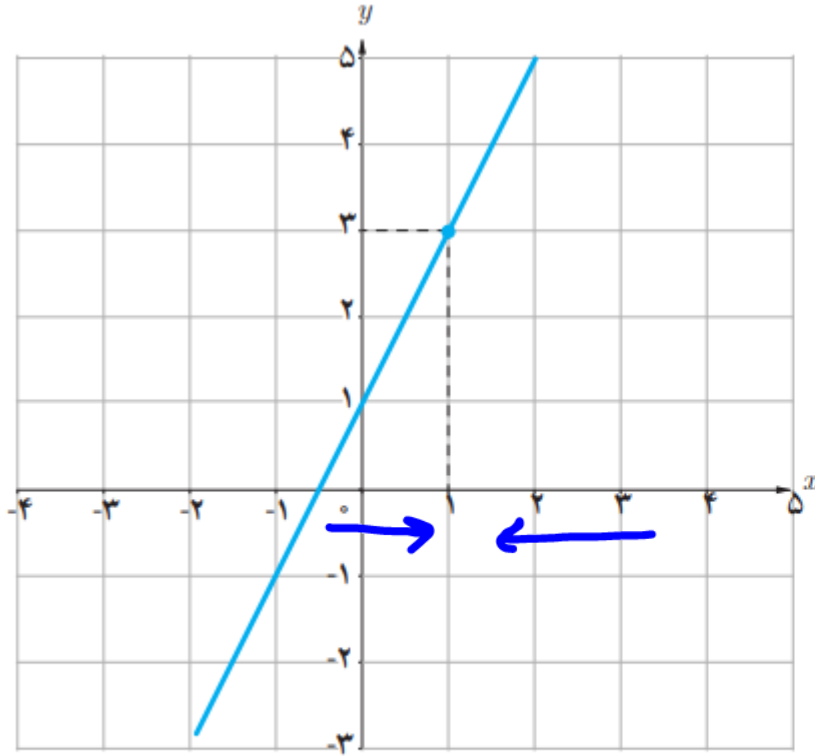


$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \dots 2$$

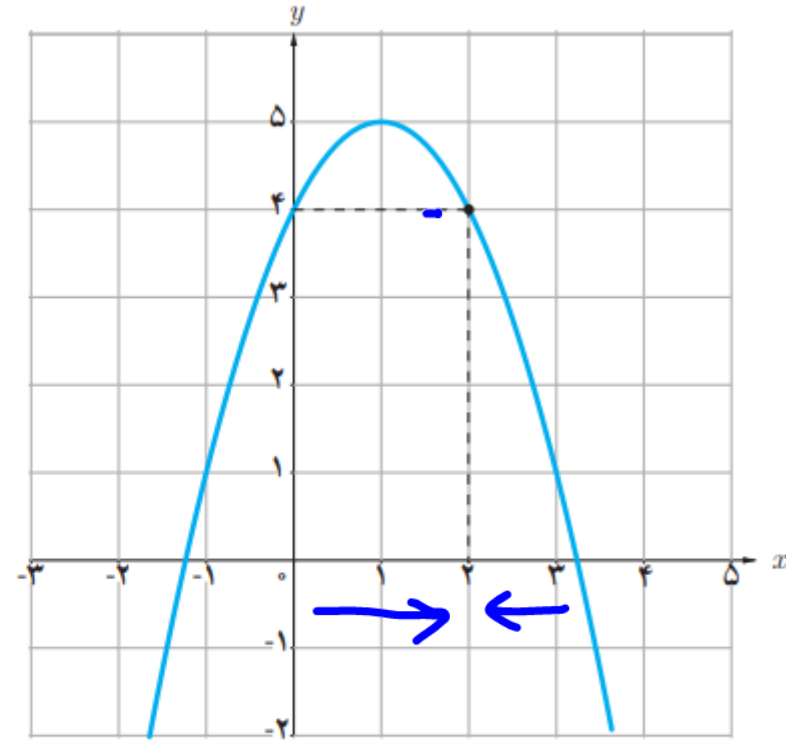
$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \dots 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = \dots 2$$

۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.

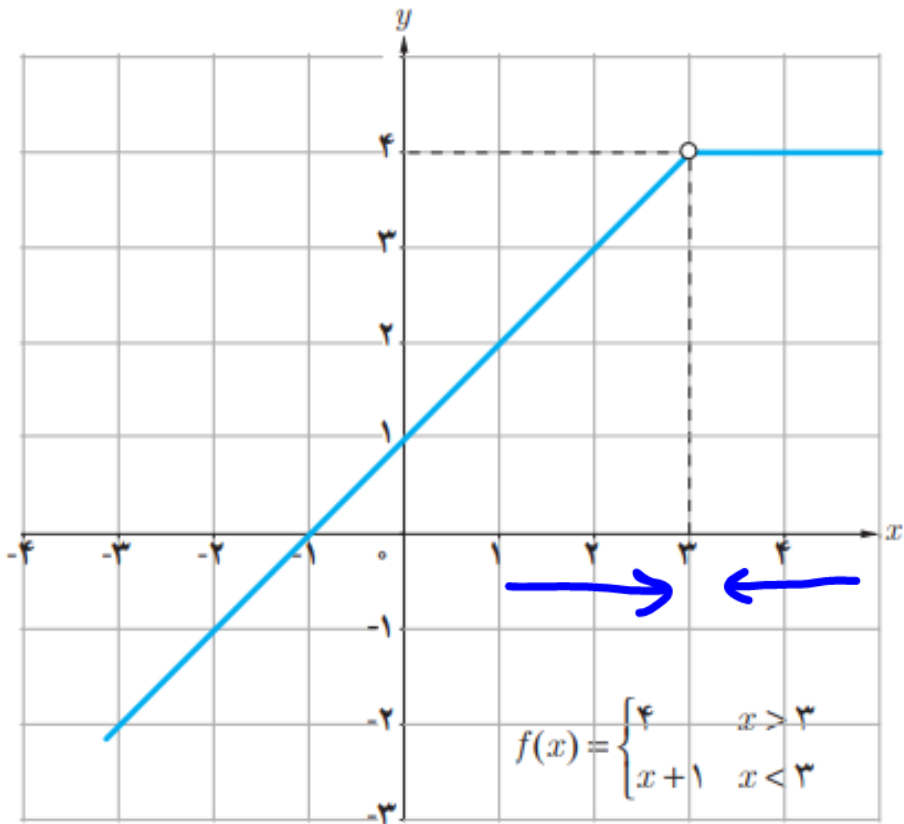


$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

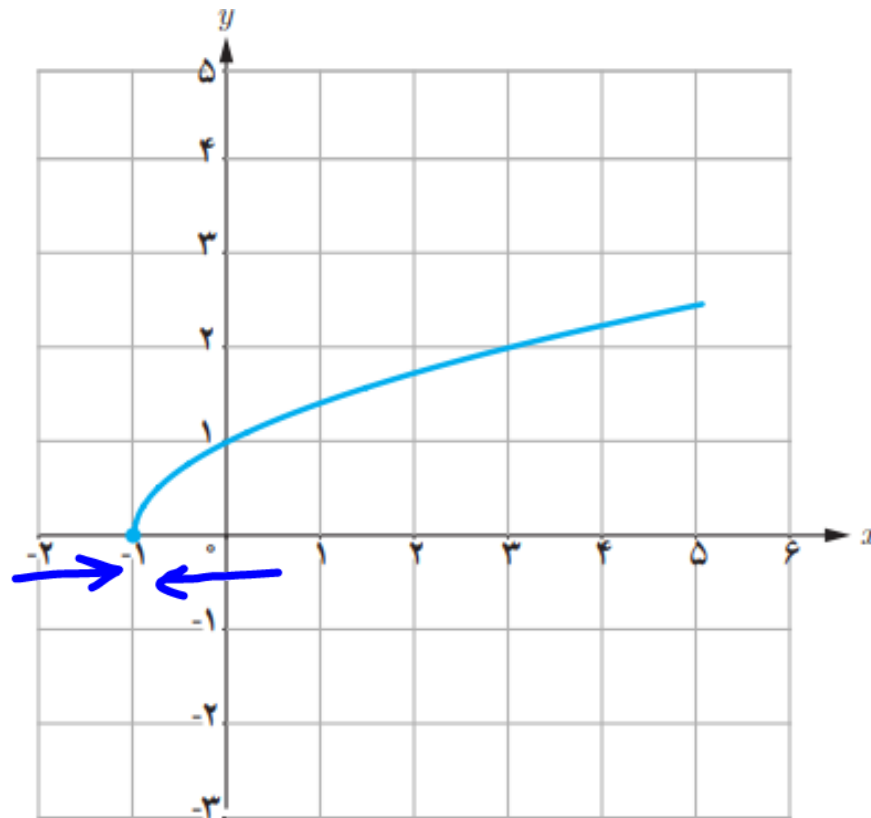


$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x + 4) = 4$$

حل تمرینات صفحه ۱۲۲ - ۱۲۰ کتاب مسابان ۱



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = \text{موجود نیست}$$



حل تمرینات صفحه ۱۲۲ - ۱۲۰ کتاب مسابان ۱

۳ با تکمیل هر یک از جدول های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} (-3x + 4) = \dots$ ۴

x	-۱	-۰/۹	-۰/۱	-۰/۰۱	$\rightarrow 0$	$\leftarrow 0/001$	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶,۷	۶,۳	۶,۰۳	$\rightarrow 4$	$\leftarrow ۳,۹۹۷$	۳,۹۷	۳,۷	۲,۸	۱

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -۵$ ، $f(x) = \begin{cases} x - 4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$ $f(-1) = 3$

x	-۲	-۱/۵	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	$\rightarrow -1$	$\leftarrow -۰/۹۹۹$	-۰/۹۹	-۰/۹	-۰/۸
$f(x)$	-۶	-۵,۵	-۵,۱	-۵,۰۱	-۵,۰۰۱	$\rightarrow -5$	$\leftarrow -۴,۹۹۹$	-۴,۹۹	-۴,۹	-۴,۸



AFSHAR
ACADEMY

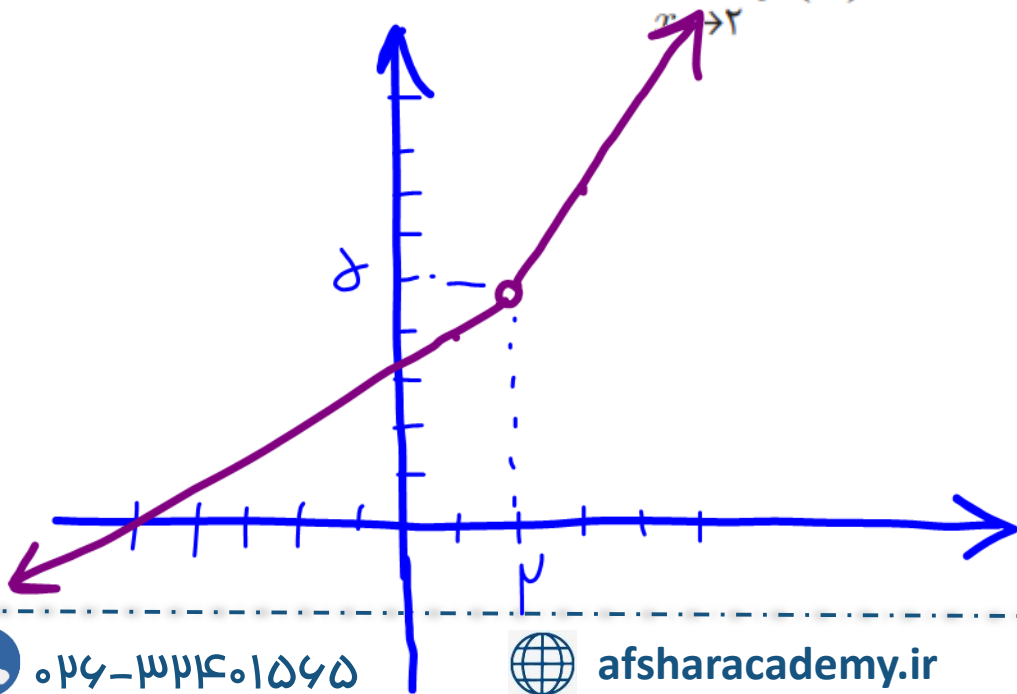
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x > 2 \\ x+3 & x < 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$ ، تعریف شده است؟ خیر

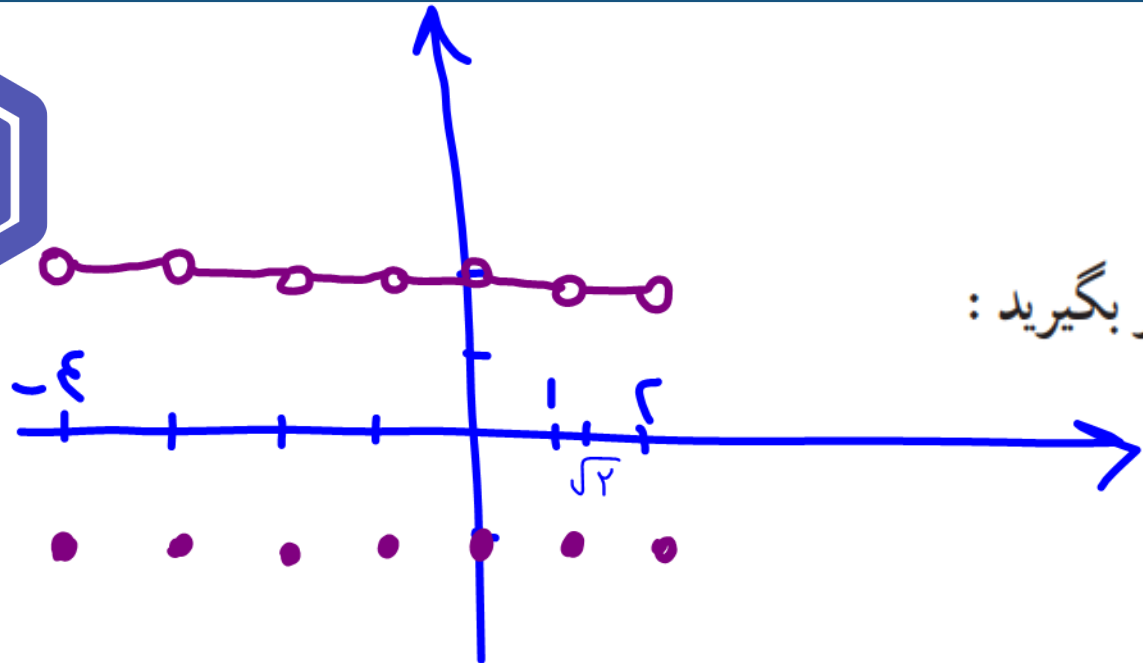
ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را به دست آورید.



x	1,9	1,99	2	2,01	2,1
$f(x)$	4,9	4,99	8	5,01	5,1



حل تمرینات صفحه ۱۲۲ - ۱۲۰ کتاب مسابان ۱



۵ تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$

$$g(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$$

$$g(\sqrt{2}) = 2$$



حل تمرینات صفحه ۱۲۲ - ۱۲۰ کتاب مسابان ۱

$$1 - x^2 \geq 0 \rightarrow 1 \geq x^2$$
$$\rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow |x| \leq 1$$
$$-1 \leq x \leq 1 \rightarrow [-1, 1]$$



۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید. $D = [-1, 1] - \{0\}$

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ **صفر**

پ) آیا این تابع در همسایگی $0/9$ تعریف شده است؟ **بله**

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟ **خیر**

بله

۷ اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 < 2 \rightarrow x < 3 \\ 2x+3 > 2 \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اِسْتِزَان}} -\frac{1}{2} < x < 3$$

$(-\frac{1}{2}, 3)$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

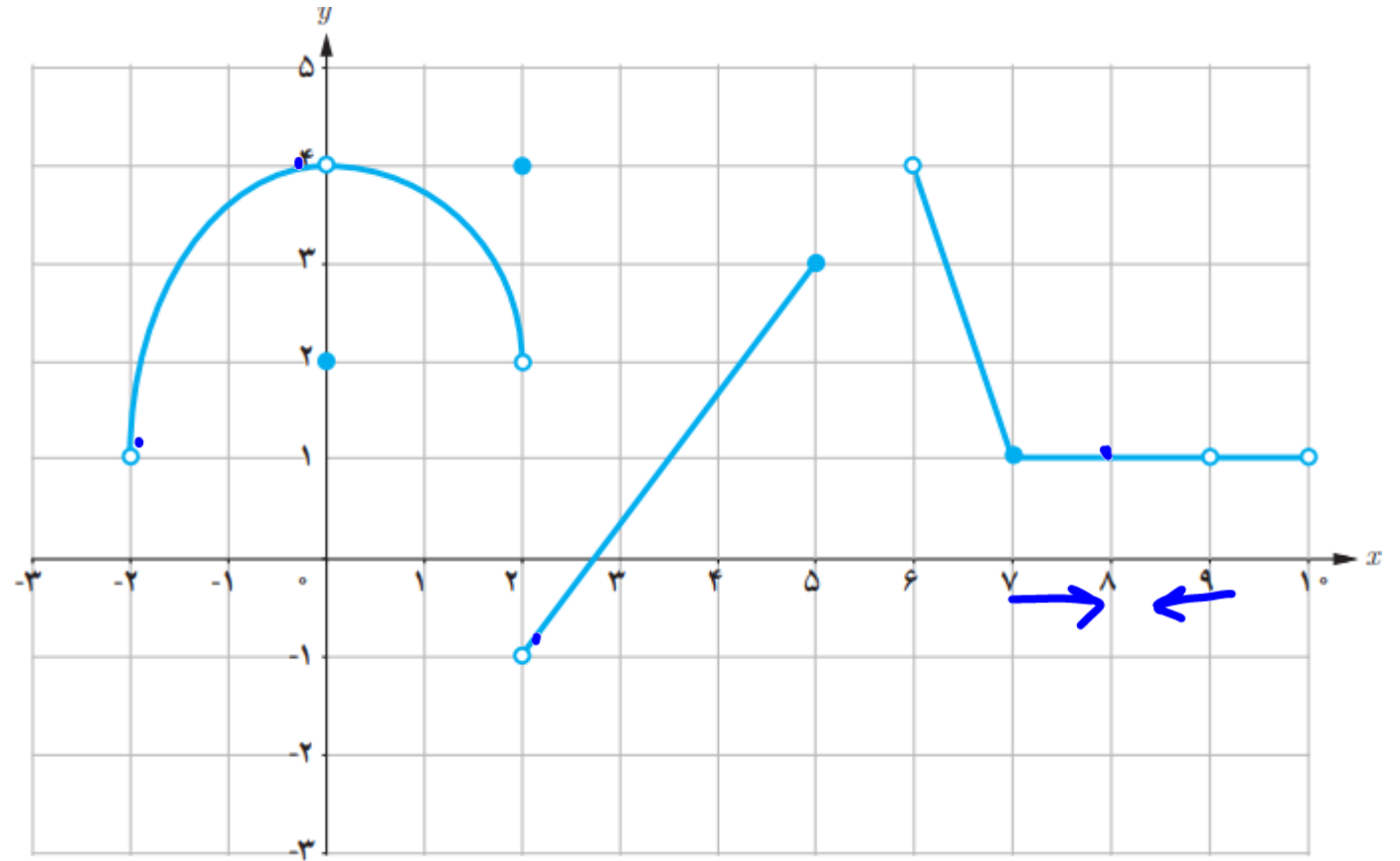
ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ **وجود نیست**

پ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = // //$

ت) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = // //$

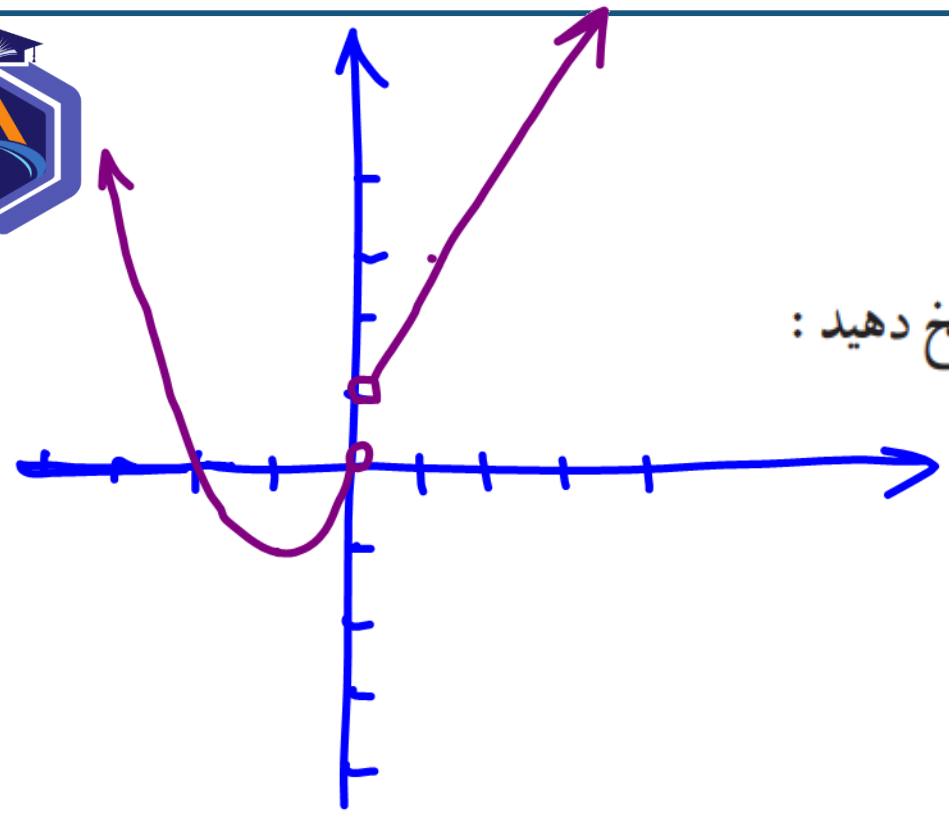
ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = |$

ج) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = |$





حل تمرینات صفحه ۱۲۹ - ۱۲۷ کتاب مسابان ۱



۲ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

$[0] [1]$ $\rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2 - 1}$

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن گاه مقادیر $f(x)$ به عدد 0 نزدیک می شوند، بنابراین :

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

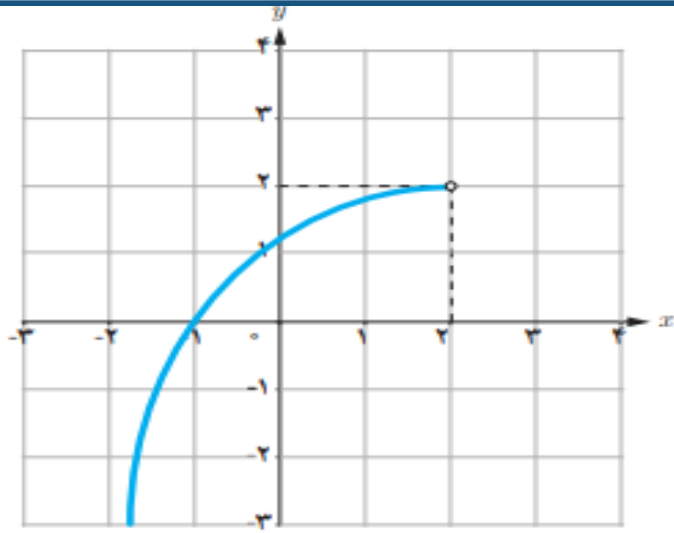
ب) حد راست تابع f در نقطه $x=0$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطه $x=0$ حد دارد؟ چرا؟

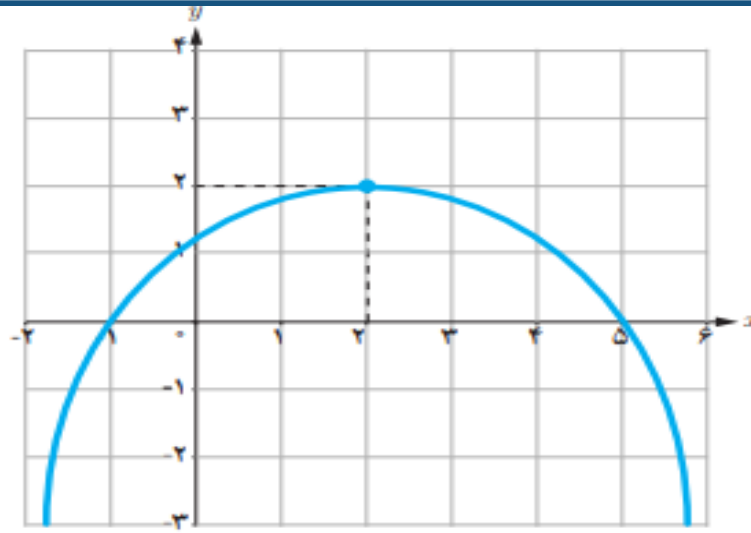
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟
در هر مورد توابع را مشخص کنید.

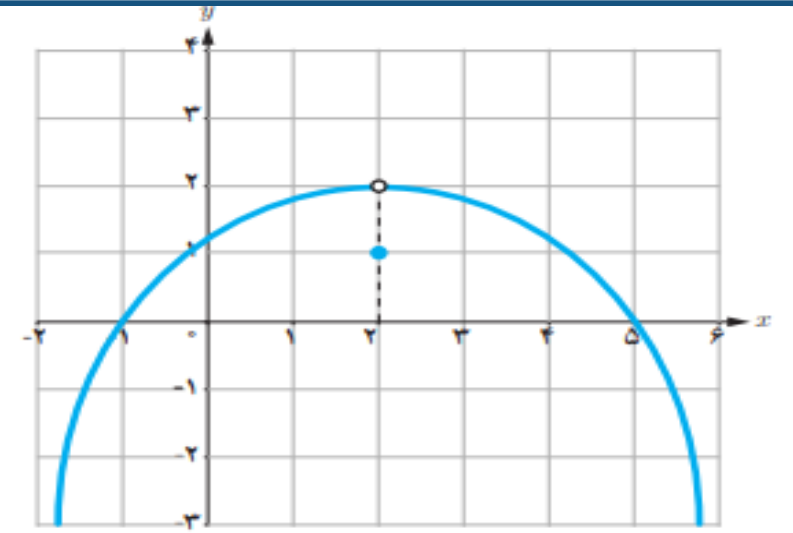
- تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. الف - ب - ج
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. الف
- تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. ب - ت - ث
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. ب
- تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. ج
- تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. ت - ث



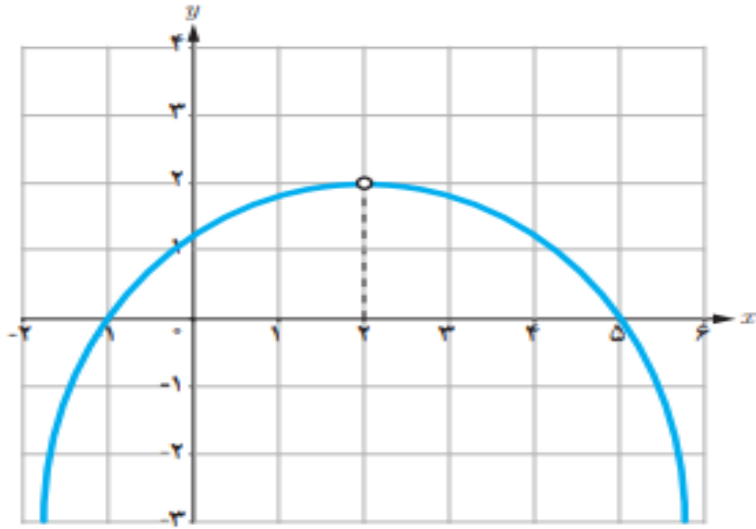
(ب)



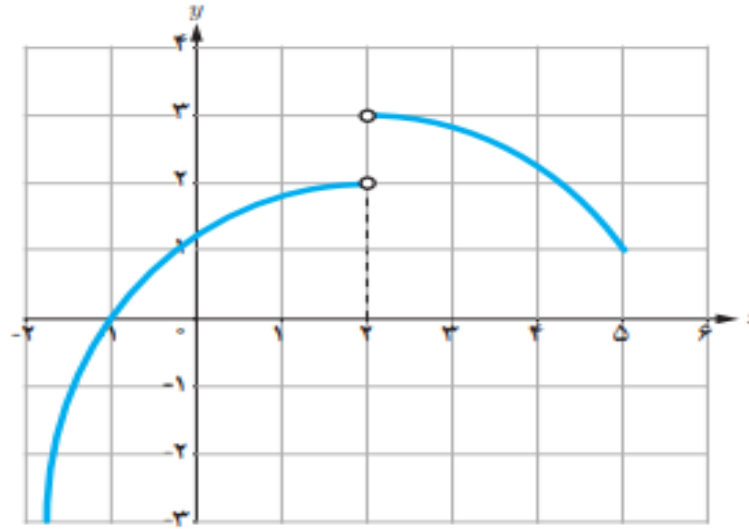
(ب)



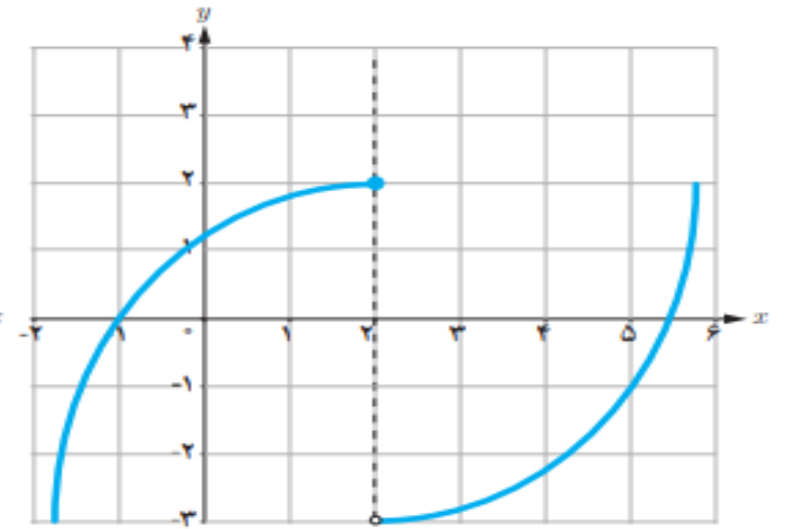
(الف)



(ج)



(ث)



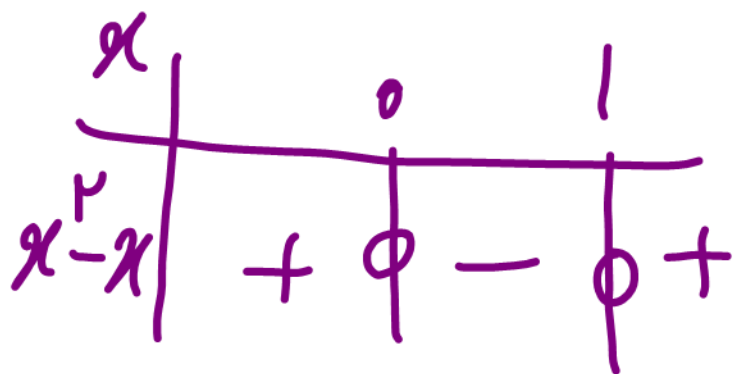
(ت)

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در نقطه $x=1$ چه می توان گفت؟

$$\sqrt{x^2 - x} \geq 0 \longrightarrow D = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$x(x-1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \text{وجود نیست}$$

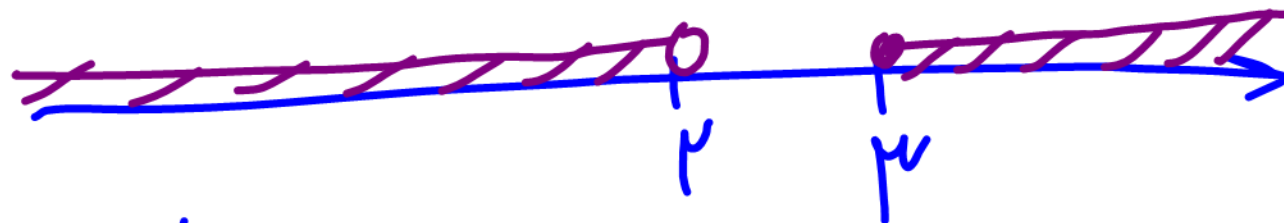


۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می توان گفت؟

$$[x] - 2 = 0$$

$$D = \mathbb{R} - [2, 3)$$

$$[x] = 2$$



$$2 \leq x < 3$$

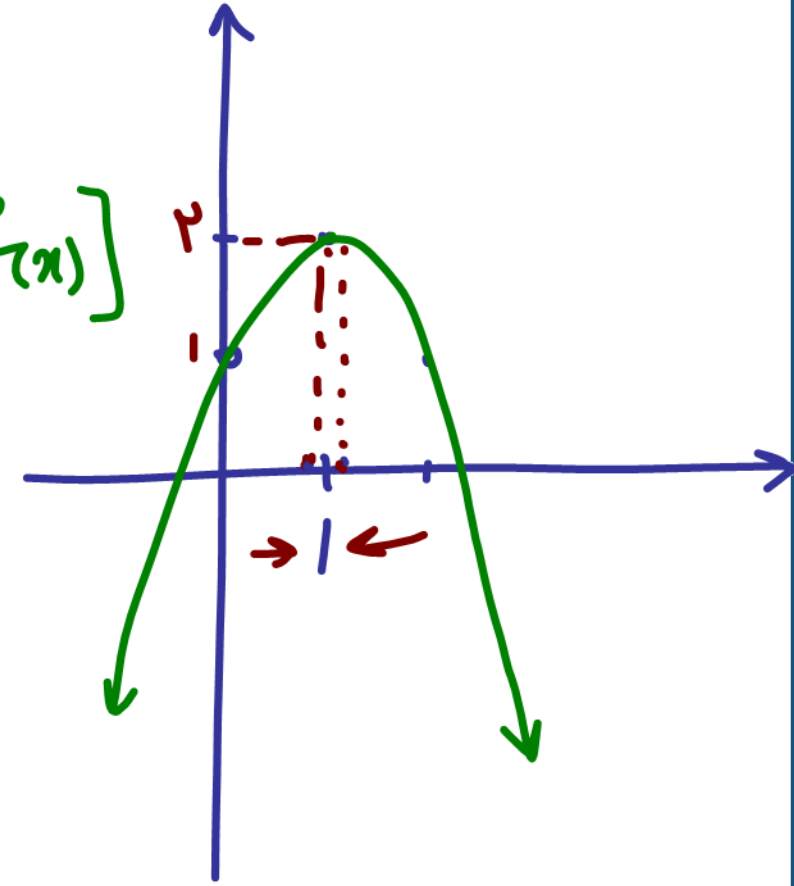
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \text{صورتش نیست}$$

۶ با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید. [] نماد جزء صحیح است

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$

ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right] = [2] = 2$

$[\lim_{x \rightarrow a} f(x)] \neq \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$

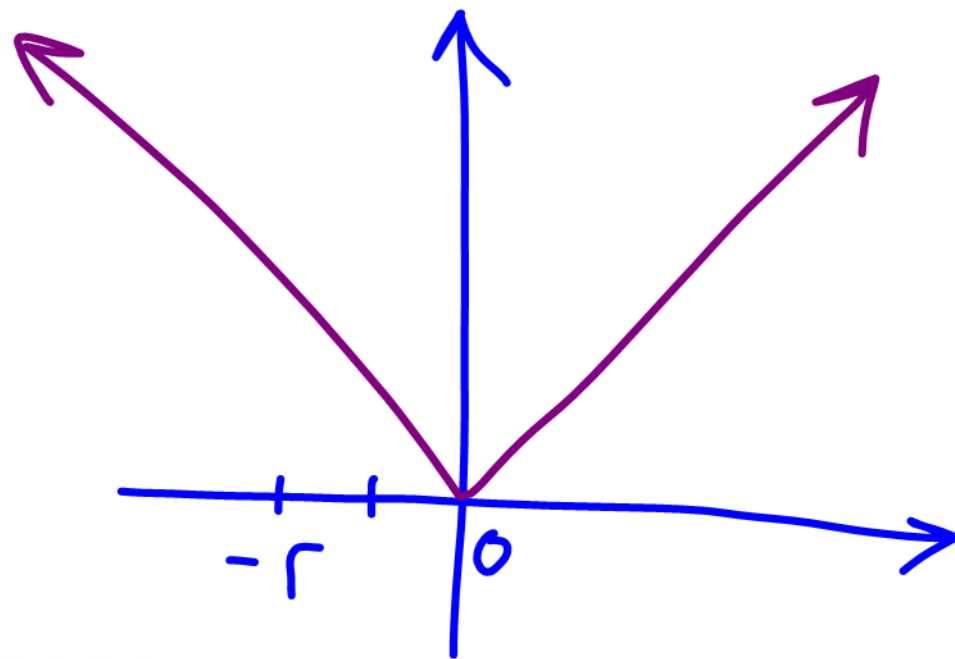


۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ را به دست آورید. **صفر**

ب) اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ برقرار است؟ **بله**

$$\lim_{x \rightarrow a} |x| = \left| \lim_{x \rightarrow a} x \right|$$



۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3 = (\sqrt{9} - 9)^3 = (-6)^3 = -216$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -1} (-6x^4 - 4x^2 + 5) = -6(-1)^4 - 4(-1)^2 + 5 = -6 - 4 + 5 = -5$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 6)(x^3 + 1)} = \frac{(-\frac{5}{3} + \pi)(-\frac{5}{3} + 5)}{(3(-\frac{5}{3}) + 6)((-\frac{5}{3})^3 + 1)} = \frac{0}{\text{عددی}} = 0$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-4} = \frac{1-2}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2 + 6x} = \sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

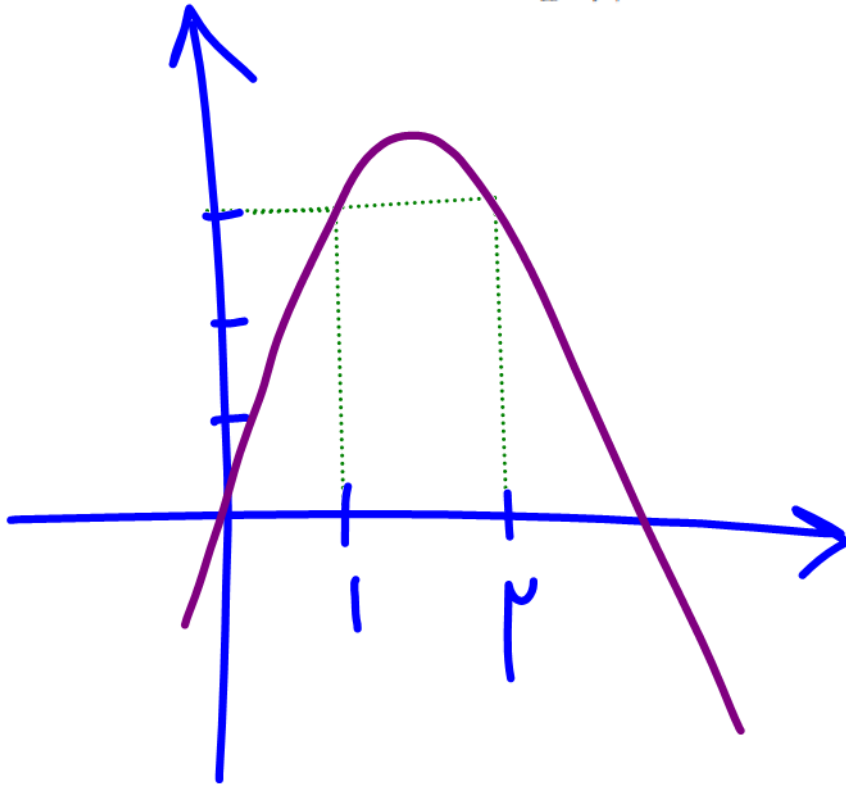
$$x(4x+6) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\frac{1-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2} - \pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. آیا می توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟



۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)} = 4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 12 \rightarrow \begin{cases} y = 4x \\ y = 4x + 4 \\ y = x^2 + 1 \\ \vdots \end{cases}$$



نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L + L) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) + \lim_{x \rightarrow a} L =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) + \lim_{x \rightarrow a} L$$

$$= 0 + L = L$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L =$$
$$= L - L = 0$$



حل تمرینات صفحه ۱۴۰ - ۱۳۹ کتاب مسابان ۱

وجود ندارد +

$$\begin{cases} 1 \rightarrow 1-1=0 \\ -1 \rightarrow 0-1=-1 \end{cases}$$

$$y=3x+2$$

$$y=x^2-1$$

$$y=[x]-1$$

وجود ندارد -

$$y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$3(1)+2=5 \quad (1)^2-1=0$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.
ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$f(x)+g(x)=\dots$ x^2+3x+1	$g(x)=3x+2$	$f(x)=x^2-1$	هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.
$f(x) \cdot g(x)=\dots$ $([x]-1)(x^2-1)$	$g(x)=x^2-1$	$f(x)=[x]-1$	تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+2}{[x]-1}$	$g(x)=[x]-1$	$f(x)=3x+2$	توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.
$f^2(x) = 5 \cdot (x \neq 1)$		$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$	تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2-1}$$

$$f(x) = x^2-1$$

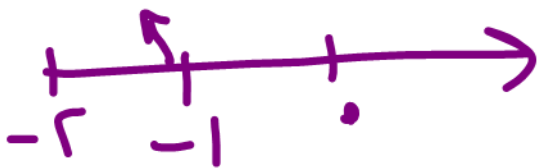
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع \sqrt{f} در ۱ حد ندارد.

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می توان گفت؟

حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x) - f(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{وجود ندارد}$$



۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ حد داشته باشد :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x| + 1} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

$$3(-1) + b = \frac{(-1)^2 - 2}{1}$$

$$-3 + b = -1 \rightarrow b = 2$$

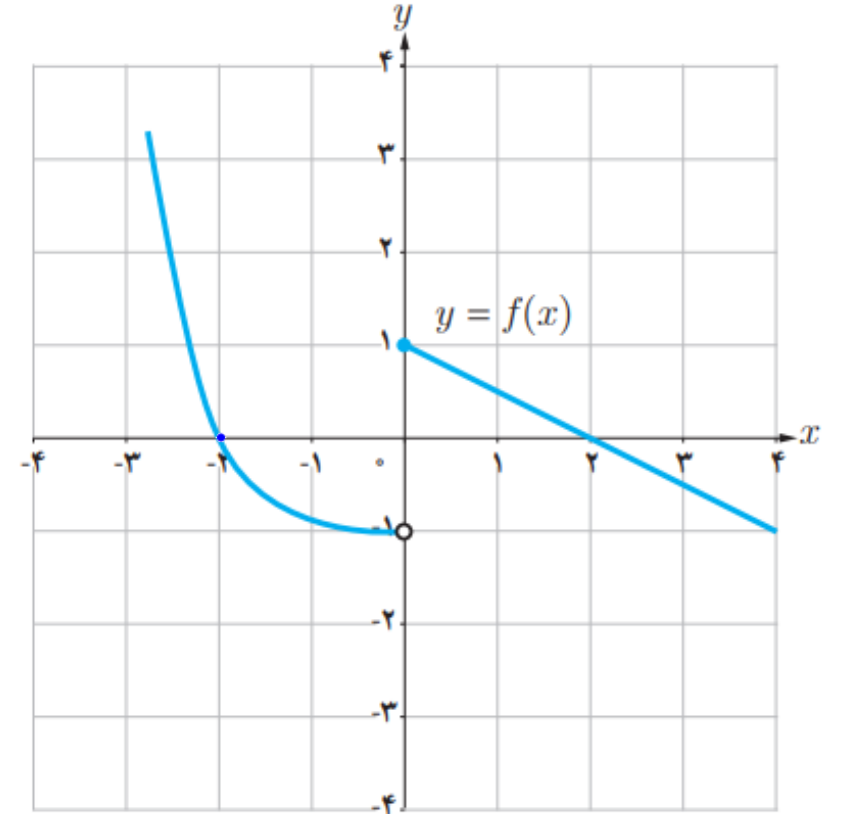
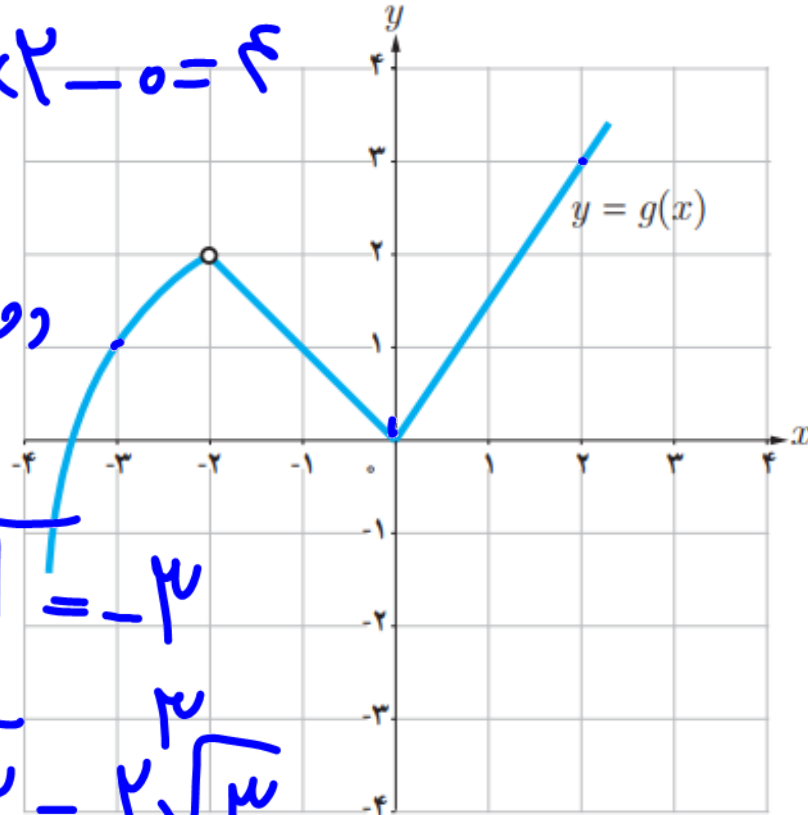
در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید. ▲

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x)) = 2 \times 2 - 0 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{0} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} -\sqrt[3]{g(x)} = -\sqrt[3]{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\wedge g(x)} = \sqrt[3]{\wedge 2^3} = 2 \sqrt[3]{3}$$





$$= \underbrace{x^2 - 1} + \underbrace{x^2 + x} = \underbrace{(x-1)(x+1)} + \underbrace{x(x+1)}$$
$$= (x+1)(x-1+x)$$

حل تمرینات صفحه ۱۴۴ کتاب مسابان ۱

مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overbrace{2x^2}^{x^2+x^2} + x - 1}{3x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{3x \cancel{(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{3x} = \frac{-2}{-3} = 1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overbrace{x^2}^2 [\cancel{x}] - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overbrace{2(x^2 - 1)}^{(x-2)(x+2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x+2)}{1} = 10$$

$$\begin{aligned}
 \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)}{x^2-4} \times \frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ت) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2-\sqrt{x})}{(3-\sqrt{2x+1})} \times \frac{(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})} \times \frac{(3+\sqrt{2x+1})}{(3+\sqrt{2x+1})} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\cancel{3-x})(3+\sqrt{2x+1})}{(9-(2x+1))(2+\sqrt{x})} = \frac{3}{4} \\
 &= \frac{3}{2 \times 2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \times (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{\underbrace{x^2 + x}_{x(x+1)} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1+x} - \cancel{(1-x)}}{x \underbrace{(x+1)}_1 \underbrace{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}_2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x} \circledast x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} (\cancel{\sqrt{x}} - 1)}{(\cancel{\sqrt{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$$

۲ اگر $f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)}{(x-1)(2x+1)} \times \frac{(2x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)}{(x-1)x} = \frac{1}{-\frac{3}{2} \times -\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} &= x^2 + x^2 - x - 1 \\ &= \underbrace{x^2 - 1} + \underbrace{x^2 - x} \\ &= \underbrace{(x-1)(x+1)} + \underbrace{x(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x-1)(x+1+x) \\ &= (x-1)(2x+1) \end{aligned}$$

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) \times (1 + \sin x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{1 - \sin^2 x}^{\cos^2 x}}{\cancel{\cos x} (1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{0}{1+1} = 0$$

ب)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \sin x \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cancel{\cos x} - \cancel{\sin x})}{(\cancel{\cos x} - \cancel{\sin x})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



۱۲. ص

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

حل تمرینات صفحه ۱۴۴ کتاب مسابان ۱

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{|1 - \cos x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$\frac{0}{0}$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 1 \times 2 = 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{x \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \times 1 = 2$$



$$t = x + \pi \rightarrow x = t - \pi$$

حل تمرینات صفحه ۱۴۴ کتاب مسابان

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t - \pi) + 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t(1 + \cos t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 + \cos t}$$

$$= 1 \times 0 = 0$$



$$t = x - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$$

حل تمرینات صفحه ۱۴۴ کتاب مسابان ۱

$$\begin{aligned} \text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\cancel{6(t + \frac{\pi}{3}) - 2\pi}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ح) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x+1}}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t^2 - 3t+1}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\cancel{(t-1)}(2t-1)}{\cancel{(t-1)}(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t-1}{t+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$t = \sqrt{x}$
 $t^2 = x$



حل تمرینات صفحه ۱۵۱ کتاب مسابان۱

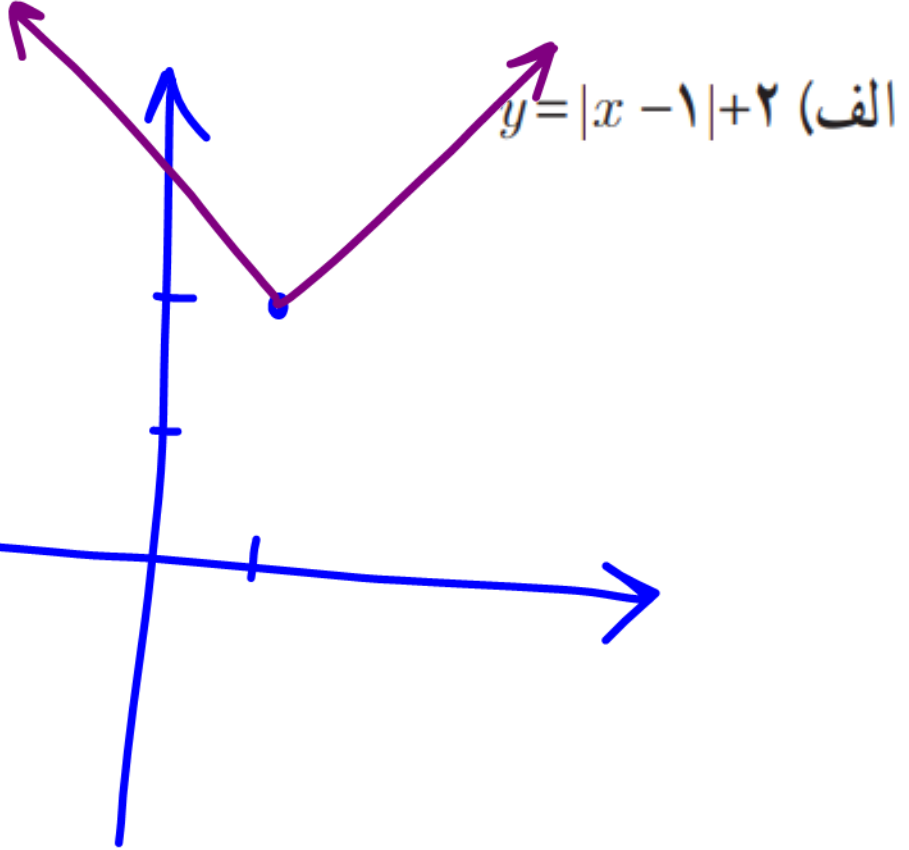
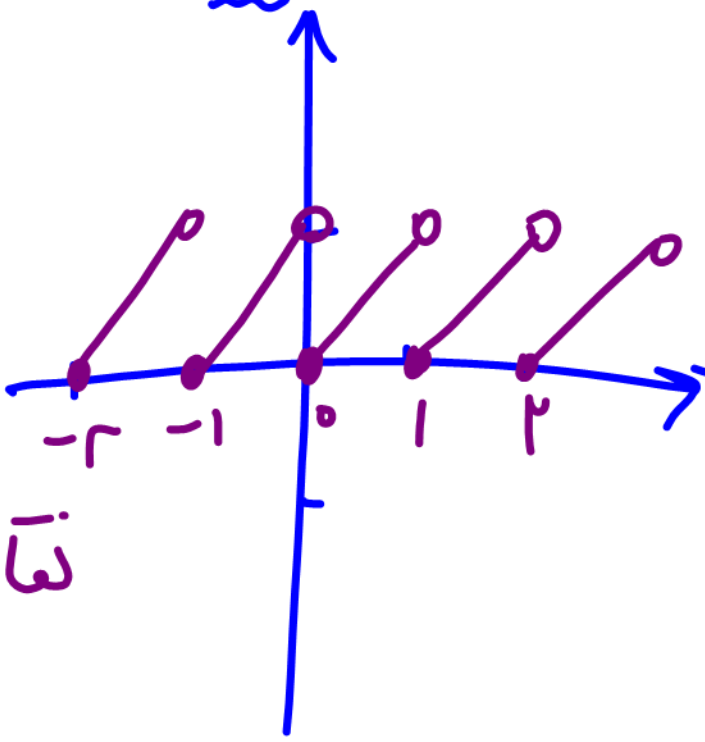
۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

$$y = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

نقاط ناپیوستگی = \mathbb{Z}

$$y = x - [x] \text{ (ب)}$$





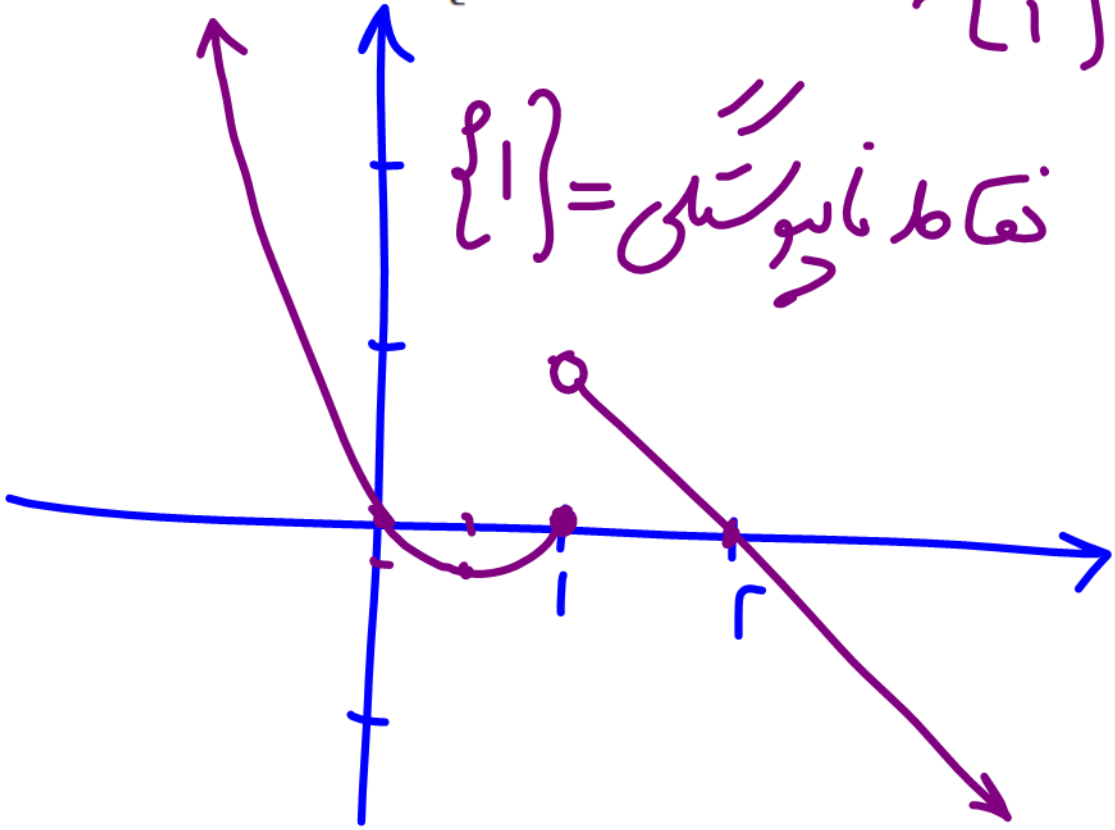
حل تمرینات صفحه ۱۵۱ کتاب مسابان۱

رایس $\left[\begin{matrix} -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right]$

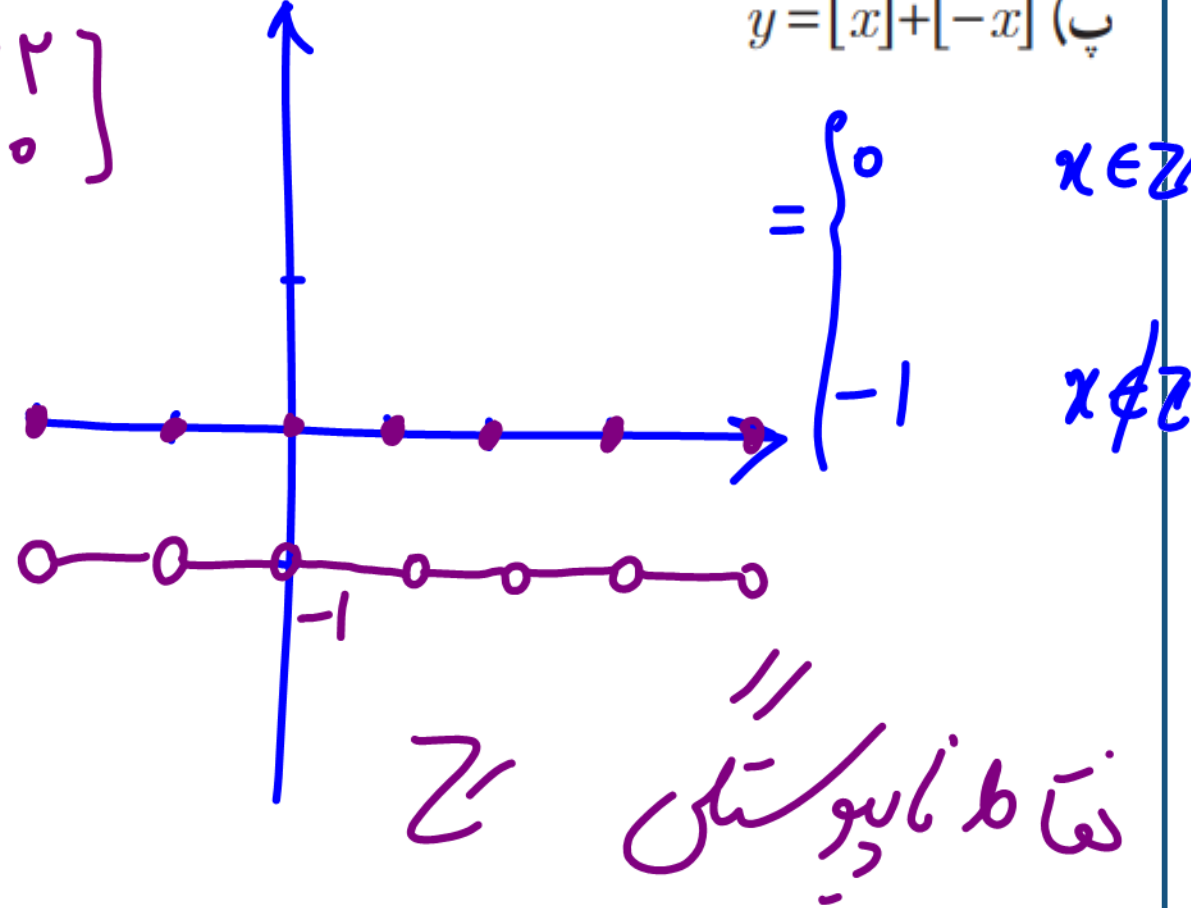
$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

نقاط ناپوشانی = $\{1\}$



پ) $y = [x] + [-x]$



۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 1$$

$$f(1) = a$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ a & x = 1 \text{ (الف)} \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow a = 1$$



حل تمرینات صفحه ۱۵۱ کتاب مسابان ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{مهم}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$

$$f(1) = a$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3 \\ f(1) = a \end{array} \right\} \rightarrow a = 3$$



حل تمرینات صفحه ۱۵۱ کتاب مسابان ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{\sqrt{x} - 1}}{(\cancel{\sqrt{x} - 1})(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$\sqrt{x^2} - 1^2$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & 0 < x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

$$f(1) = [1] + a = 1 + a$$

$$\rightarrow 1 + a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$



حل تمرینات صفحه ۱۵۱ کتاب مسابان۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a)[x] = ([1^+] - a)[1^+] = (1 - a) \cdot 1 = 1 - a$$

$k(x) = ([x] - a)[x]$ (ت)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - a)[x] = ([1^-] - a)[1^-] = (0 - a) \cdot 0 = 0$$

$$f(1) = ([1] - a)[1] = (1 - a) \cdot 1 = 1 - a$$

$1 - a = 0$
 $a = 1$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a ، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

در $x=0$ حد ندارد

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \text{ (الف)} \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$$



حل تمرینات صفحه ۱۵۱ کتاب مسابان ۱

حد ندارد پس بیگانه است

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

$a \neq 0$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} = a & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (ب)$$

$\rightarrow a = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq g(0)$

بیگانه است



ناپیوسته \rightarrow حد ندارد

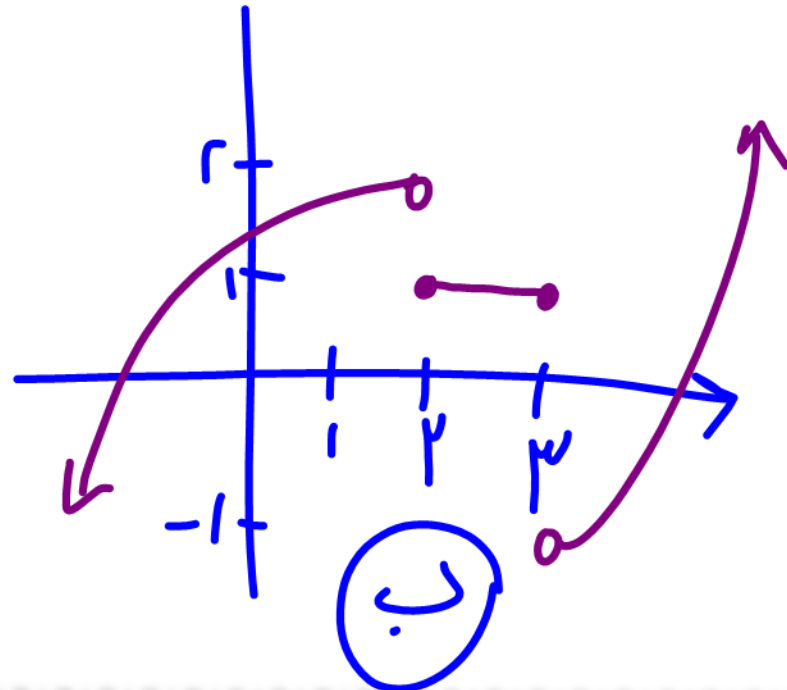
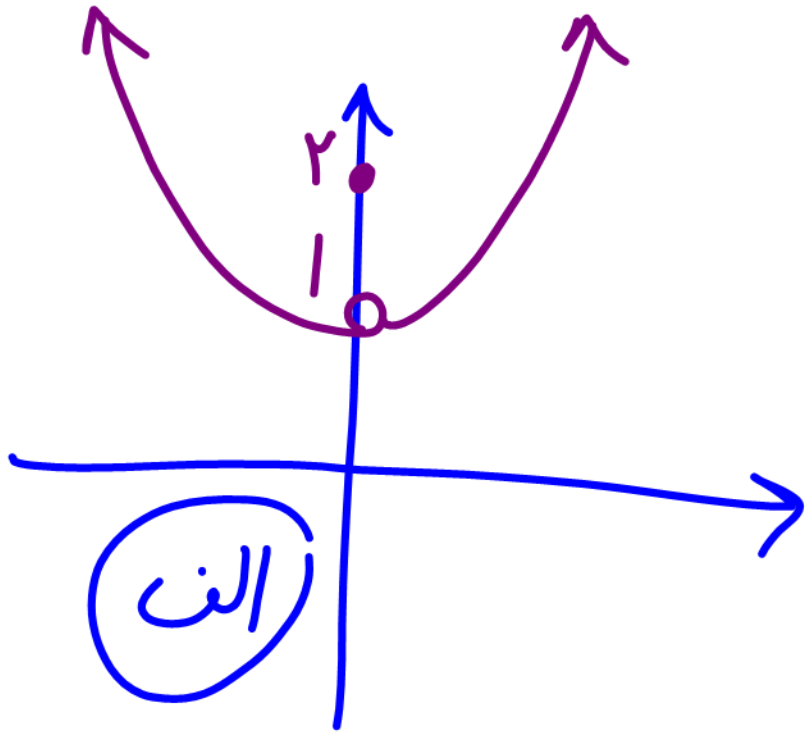
حد دارد \rightarrow پیوسته

حل تمرینات صفحه ۱۵۱ کتاب مسابان۱

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

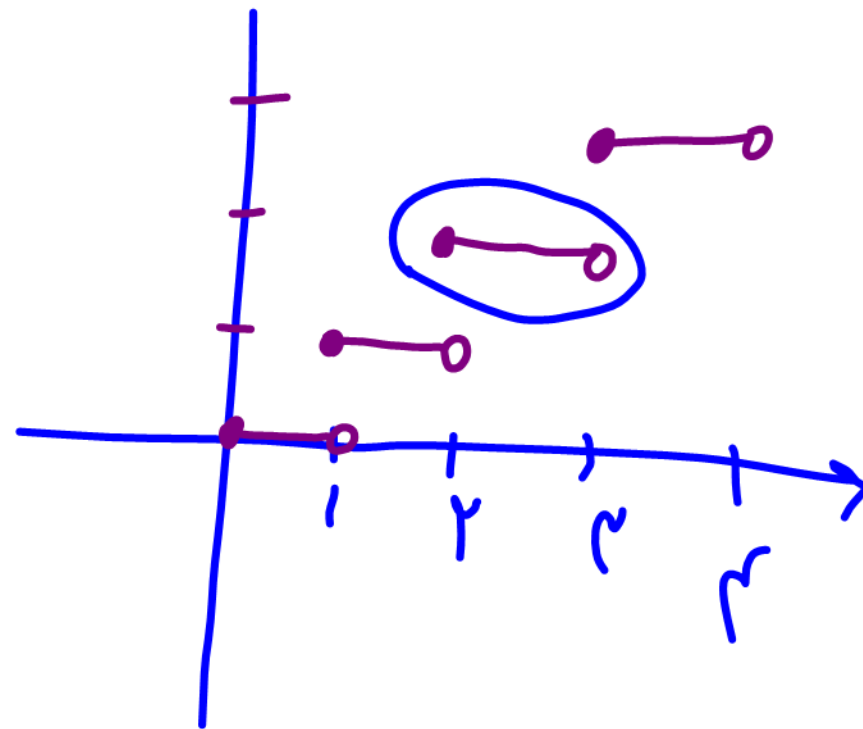
پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.



$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 8 \\ 2 & x > 8 \end{cases}$$

۵ تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(k, 2)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

۳





$(-\infty, 3]$

۶ بازه بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

$3-x \geq 0$

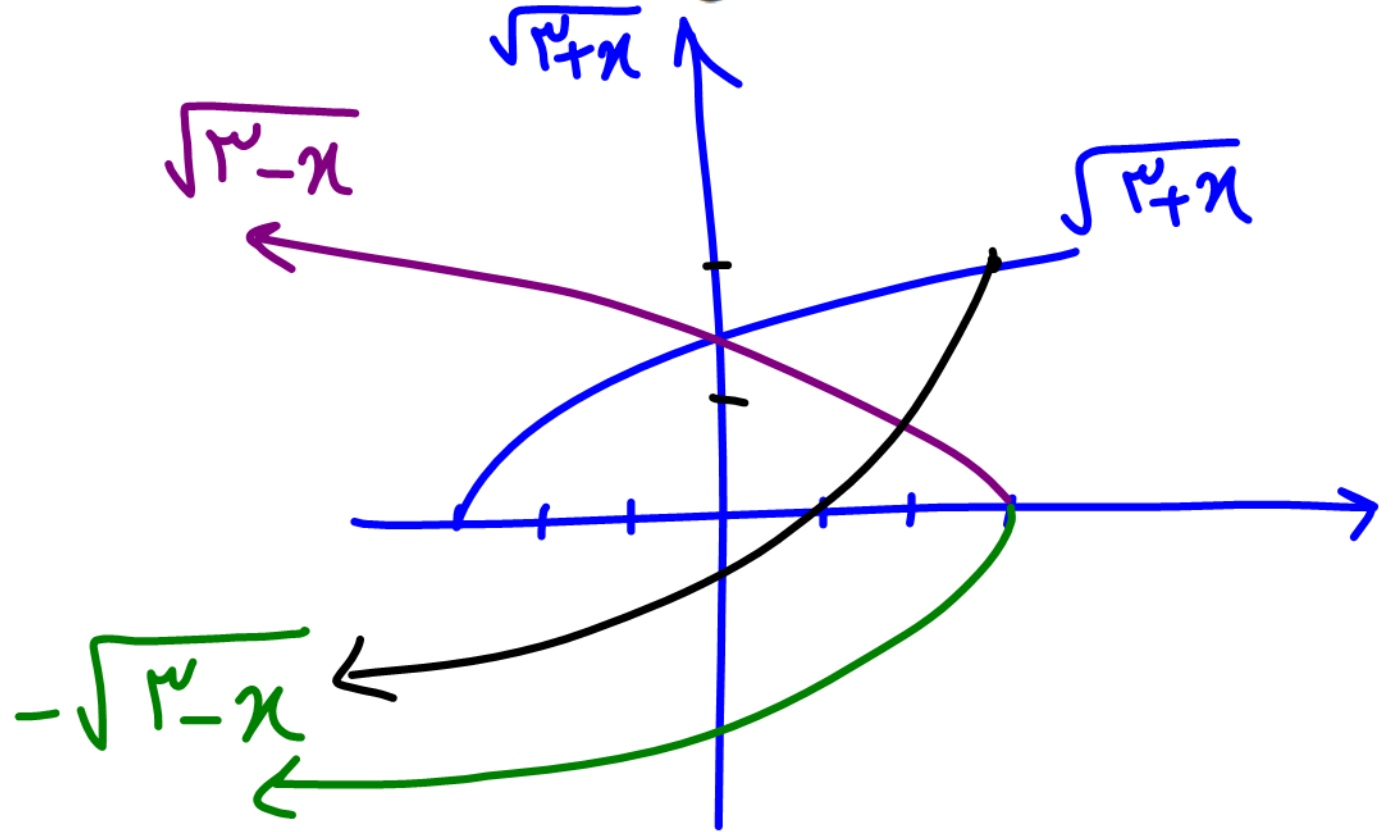
$3 \geq x$

$(-\infty, 3]$

$[0, 1]$

$[-5, -1]$

$[-100, 1]$





$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2a) = (0 - 2a) = -2a$$

$$f(0) = b - 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x > 0 \\ b - 1 & x = 0 \\ x - 2a & x < 0 \end{cases}$$

مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته باشد. ✓

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} -2a = b - 1 = \frac{1}{2} &\rightarrow -2a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{4} & \\ b = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} & \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1$$

حل تمرینات صفحه ۱۵۱ کتاب مسابان