



حل تمرینات

هندسه (۳)

رشته ریاضی و فیزیک

(با مراجعه به سایت www.afsharacademy.ir می توانید فیلم حل تمرینات را نیز مشاهده کنید)



حل تمرینات صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

۱- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ ماتریسی 3×4 باشد به طوری که برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 6 & 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$





حل تمرینات صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

$$2 + 1 + (-2) = 1$$

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $(x + y + z)$ را بیابید.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \xrightarrow{x=2} \begin{cases} 4 - y = 3 \\ 4 + y = 8 \end{cases} \rightarrow -y = 3 - 4 \rightarrow -y = -1 \rightarrow y = 1$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{+} 4x = 8 \rightarrow x = 2 \\ & z = -2 \end{aligned}$$





حل تمرینات صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

۳- دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{0}$ و $B \neq \bar{0}$ ولی $AB = \bar{0}$ (نکته)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the matrix multiplication $A \times B$. Matrix A is a 3×3 matrix with the first row highlighted in yellow (1, 0, 0) and the other two rows (0, 0, 0) and (0, 0, 0) also highlighted. Matrix B is a 3×3 matrix with the first two rows (0, 0, 0) and (0, 0, 0) highlighted in yellow, and the third row (0, 0, 1) also highlighted. The resulting matrix $A \times B$ is a 3×3 matrix of all zeros. Green arrows and 'X' marks indicate the calculation of the first row of the product matrix, showing that the first row of A multiplied by any column of B results in zero.





۴- با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$ (نکته)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{AB=AC}} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$





حل تمرینات صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

۵- اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به صورت $A^2 = AA$ و $A^3 = AA^2$ و ... و $A^n = AA^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$ $n > 1$) تعریف کنیم،

در این صورت با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^4 را بیابید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^3 = A A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \times I_2 = A$$

$$A^4 = A \times A^3 = A \times A = A^2 = I_2$$

$$A^2 = A^4 = A^6 = \dots = I_2$$

$$A = A^3 = A^5 = A^7 = \dots = A$$





۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -1+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

$$-1+2a=0 \rightarrow 2a=1 \rightarrow a=0.5$$

$$b-3=0 \rightarrow b=3$$



حل تمرینات صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

$$\begin{matrix} 2 \times 3 \\ \times \\ 3 \times 2 \end{matrix} \rightarrow 2 \times 2$$

۷- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A \times B$ و $B \times A$ را به دست آورید.

سپاس

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 2 - 1 \\ 2 - 1 & 2^2 - 1 \\ 3 - 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^2 + 1 & 1 - 2 + 2 & 1 - 3 + 2 \\ 2 + 1 & 2^2 + 1 & 2 - 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$



حل تمرینات صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A \times B)$ را تشکیل دهید.

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b & r_1 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \\ r_3 g & r_3 h & r_3 i \end{bmatrix}$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



حل تمرینات صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

۹- اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و B ماتریسی هم مرتبه A در این صورت

الف) برای $A \times B$ و $B \times A$ قوانینی

ب) آیا تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb & rc \\ rd & re & rf \\ rg & rh & ri \end{bmatrix} = rB$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb & rc \\ rd & re & rf \\ rg & rh & ri \end{bmatrix} = rB$$





۱- اگر A و B ماتریس های 3×3 و تعویض پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

$$\rightarrow (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \underbrace{A \times A}_{A^2} + \underbrace{A \times B}_{AB} + \underbrace{B \times A}_{BA} + \underbrace{B \times B}_{B^2} = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\rightarrow (A-B)(A+B) = \underbrace{A \times A}_{A^2} + \underbrace{A \times B}_{AB} - \underbrace{B \times A}_{BA} - \underbrace{B \times B}_{B^2}$$

$$= A^2 + \cancel{AB} - \cancel{BA} - B^2 = A^2 - B^2$$



حل تمرینات صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل A^3 را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 نکته:

$$A^2 = \begin{bmatrix} (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A A^2 = \begin{bmatrix} (-2) & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$





۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \end{bmatrix} \rightarrow |AB| = -13$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$|BA| = ((-36) + (-36) + (-36)) - ((-36) + (-36) + (-36)) = 0$$



۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به دست آورید.

$$|A^2| = |A|^2 = (-3)^2 = 9$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} \rightarrow |A| = \overbrace{(-2 \cdot 0 + 0 + 0)}^{-3} - \overbrace{(0 + 0 + 0)}^0 = -3$$



۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & |A| & |A| \\ 5 & 4 & |A|^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(|A|^3 - 2)$ را بیابید.

$$|A| = 2 \cdot |A|^3 - 5|A| \rightarrow 2 \cdot |A|^3 - 6|A| = 0$$

$$\rightarrow |A| (2 \cdot |A|^2 - 6) = 0$$

$$\begin{cases} |A| = +\sqrt{3} \rightarrow |A|^3 - 2 = (\sqrt{3})^3 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |A| = -\sqrt{3} \rightarrow |A|^3 - 2 = -(\sqrt{3})^3 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \rightarrow |A|^3 - 2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot |A|^2 - 6 = 0 \rightarrow |A|^2 = \frac{6}{2} \end{cases}$$

$$|A|^2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\rightarrow |A| = \pm \sqrt{3}$$



۴- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$|A| = d \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} + e \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= d(\cancel{bc} - \cancel{bc}) - e(\cancel{ac} - \cancel{ac}) + f(\cancel{ab} - \cancel{ab})$$

$$= 0$$





حل تمرینات صفحه ۳۰ کتاب هندسه ۳

۵- ماتریسی 3×3 چون A بیاید که $|A| = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



حل تمرینات صفحه ۳۰ کتاب هندسه ۳

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1} - 3B^{-1})$ را بیابید.

$$|A| = 2 \cdot 5 - 6 = 14 \quad A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{2}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$$

$$|B| = 2 - (-10) = 12 \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -1 & +3 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{3}{12} \\ -\frac{8}{12} & -\frac{2}{12} \end{bmatrix}$$

$$2A^{-1} - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{12} & \frac{9}{12} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{14} & -\frac{11}{14} \\ \frac{4}{7} & \frac{11}{14} \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 10 & -11 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$-\frac{5 \times 12}{7 \times 12} - \left(\frac{-10 \times 12}{12 \times 12} \right) = \frac{-20 + 10}{12} = -\frac{10}{12}$



۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

$$|A| = 10 - 6 = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$





۸- الف) ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید.

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($k \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|B| = k|A|$$

$$\begin{aligned} |B| &= (kaei + kbfg + kcdh) - (k bdi + k afh + k ceg) \\ &= k(aei + bfg + cdh) - k(bdi + afh + ceg) \\ &= k[(aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)] \\ &= k|A| \end{aligned}$$



ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ ($k \in \mathbb{R}$) بررسی کنید.

$$|A| = ad - bc$$

$$|B| = \underbrace{ka}_{\text{red}} - \underbrace{kb}_{\text{red}} = k(\underbrace{ad - bc}_{|A|})$$

$$\left. \begin{array}{l} |A| = ad - bc \\ |B| = k(ad - bc) = k|A| \end{array} \right\} \rightarrow |B| = k|A|$$





۹- برای ماتریس 2×2 مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ ($k \in \mathbb{R}$) را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

$$KA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \rightarrow |KA| = \underbrace{ka \cdot kd - kb \cdot kc}_{k^2(ad - bc)} = k^2 \underbrace{(ad - bc)}_{|A|}$$

$$|KA| = k^2 |A|$$

$$|KA| = k^n |A|$$

اگر A ماتریسی از مرتبه $n \times n$ آن گاه:



حل تمرینات صفحه ۳۰ کتاب هندسه ۳

۱۰- اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = 5$ در این صورت حاصل $|A|A$ را بیابید.

$$|A|A = |5A| = 5^3 |A| = 125 \times 5 = 625$$





حل تمرینات صفحه ۳۰ کتاب هندسه ۳

۱۱- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$|A| = 6 - (-20) = 26$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 52 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$





۱۲- به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

$$|A| \neq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} k & +3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$-2k - 3 \neq 0 \rightarrow -2k \neq 3 \rightarrow \boxed{k \neq -\frac{3}{2}}$$





۱۳- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف)
$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 3 - (-10) = 13 \neq 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 39 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$





ب) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

$$|A| = -6 - (-6) = 0$$

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{3}{-6} \neq \frac{5}{1}$$

مولدنی هستند (حواب ندارد)

پ) $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 12 - 12 = 0$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$$

دو خط برهم منطبق هستند (بی شمار جواب دارند)

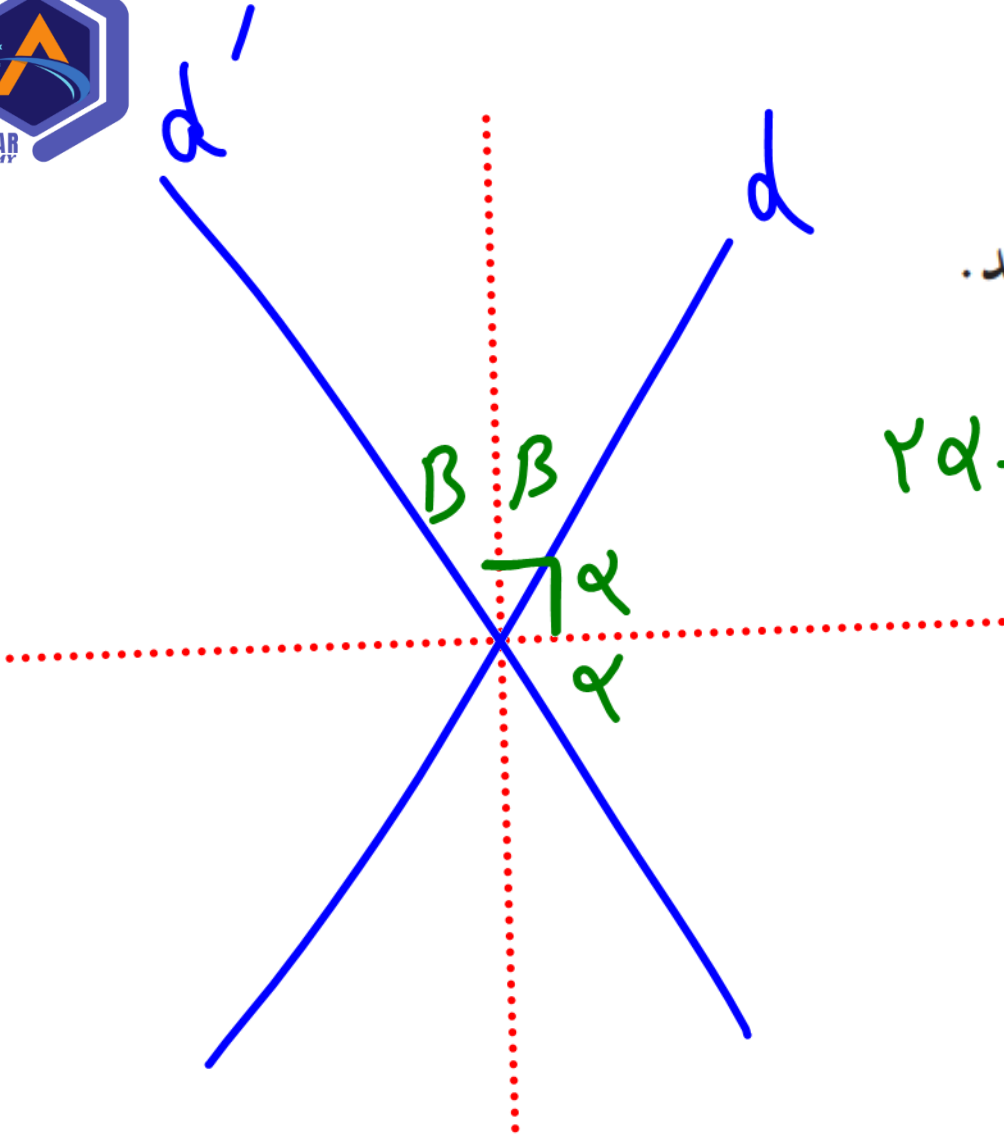




حل تمرینات صفحه ۳۹ کتاب هندسه ۳

۱- مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:
الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند.

$$2\alpha + 2\beta = 180 \xrightarrow{\div 2} \alpha + \beta = 90$$

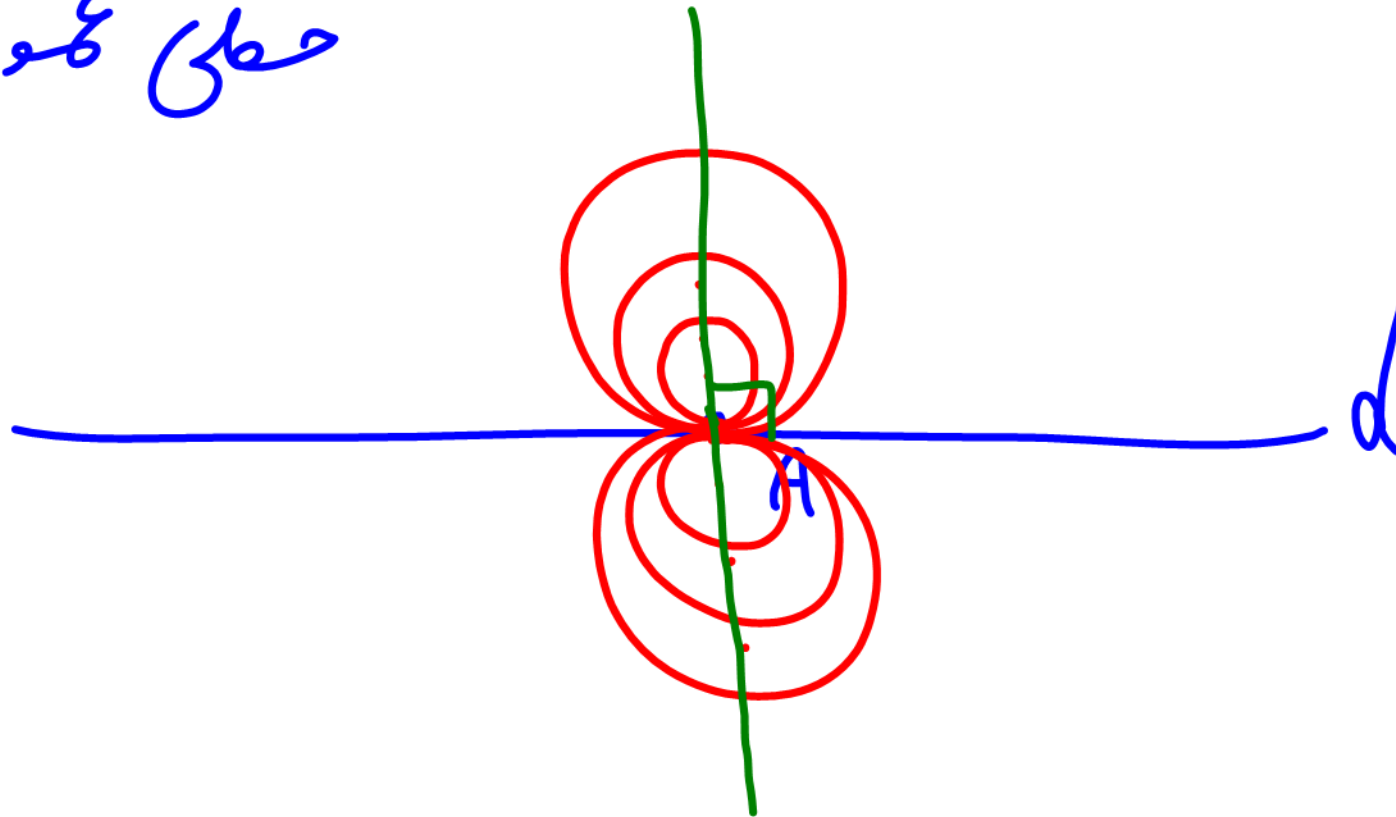




حل تمرینات صفحه ۳۹ کتاب هندسه ۳

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.

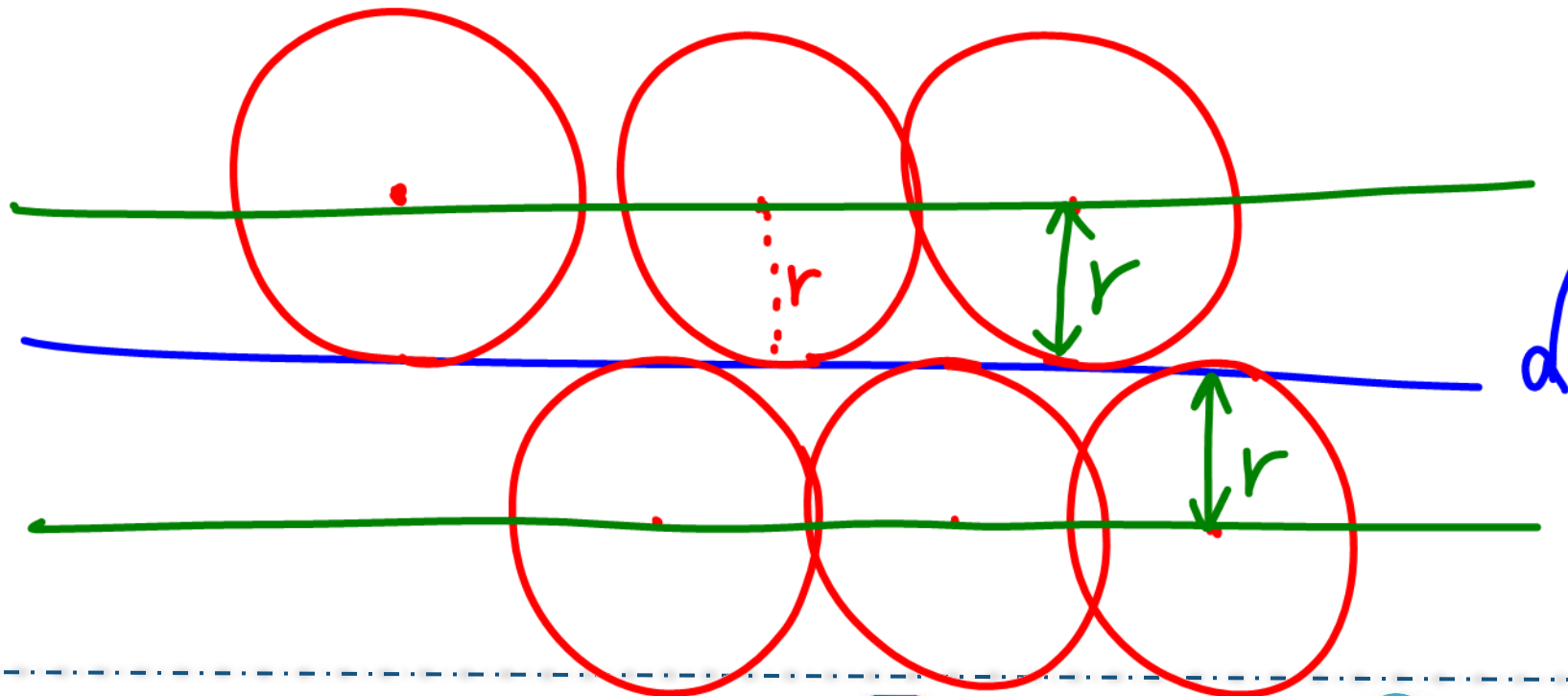
خطی عمود بر خط d در نقطه A





پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

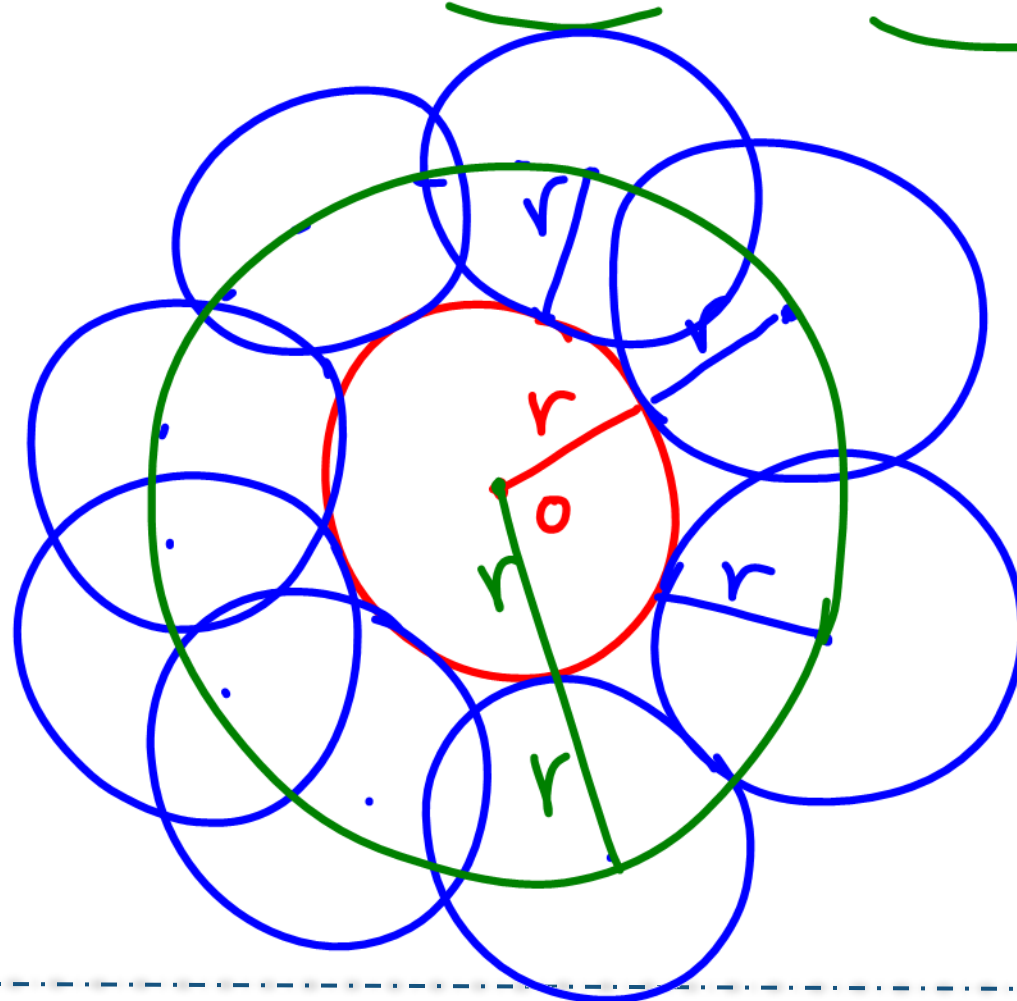
دو خط موازی با خط d و به فاصله r از آن





حل تمرینات صفحه ۳۹ کتاب هندسه ۳

ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی اند.



دایره‌ای به مرکز O و به
شعاع $۲r$



۰۲۶-۳۲۴۰۱۵۶۵



afsharacademy.ir



@afsharacademyy



۰۹۱۲۵۱۰۱۶۷۱

کره، چهارراه طالقانی،

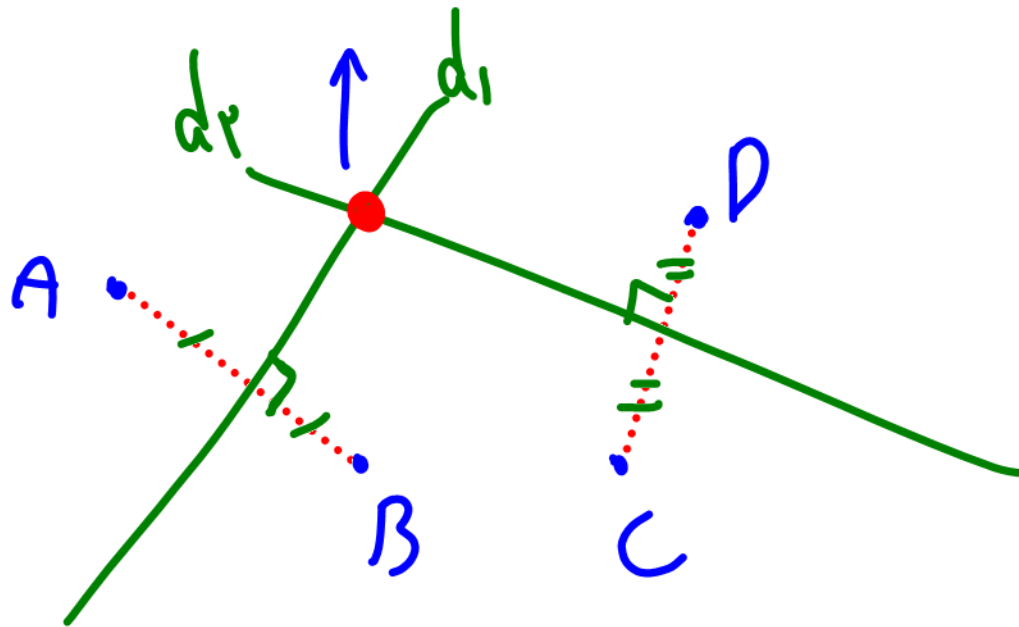




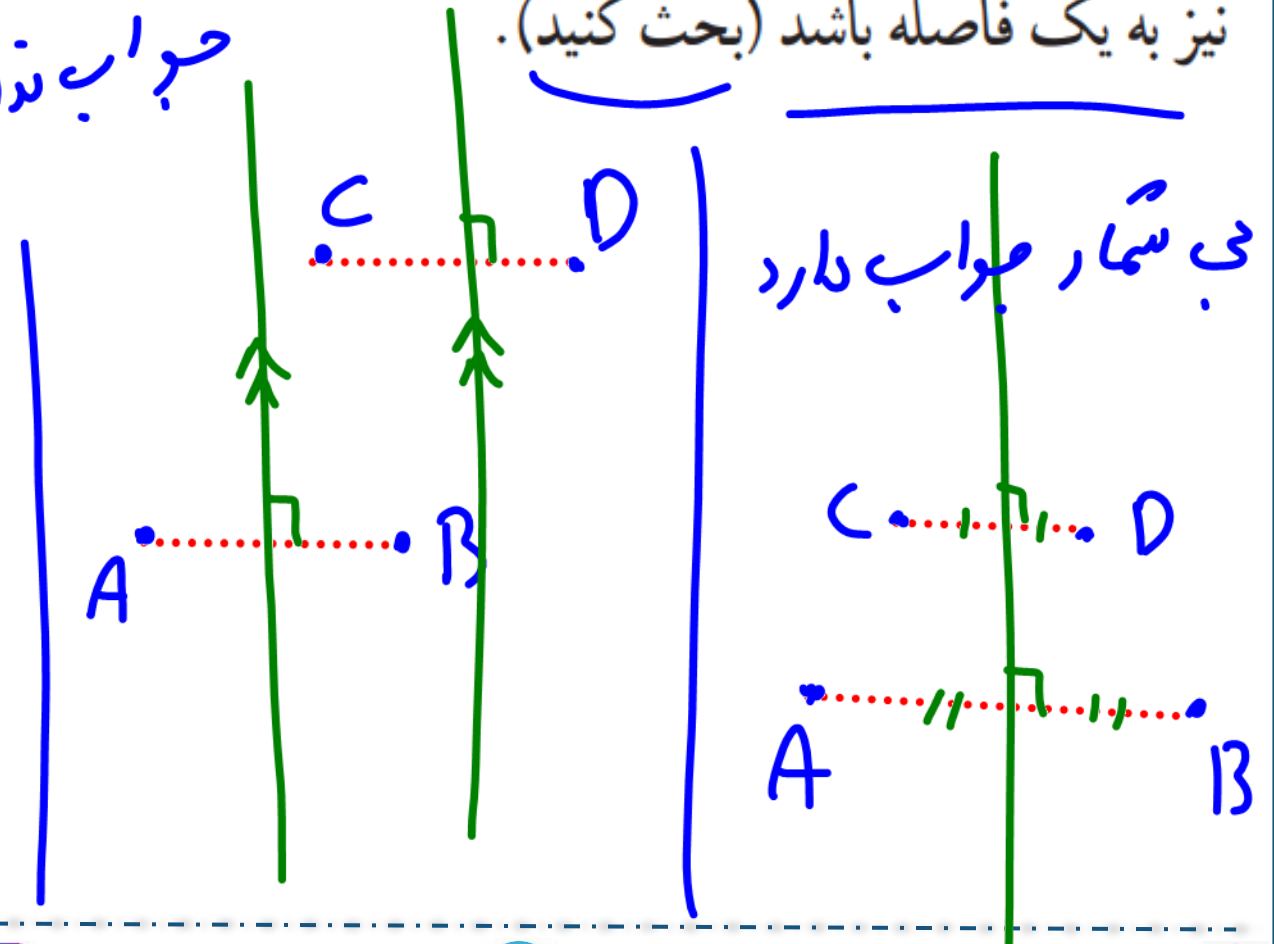
۲- نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

حساب ندارد

۱- جواب



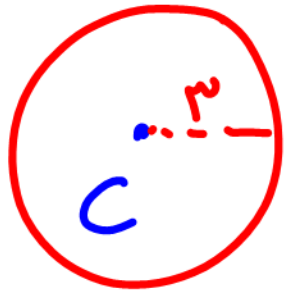
بی شمار جواب دارد



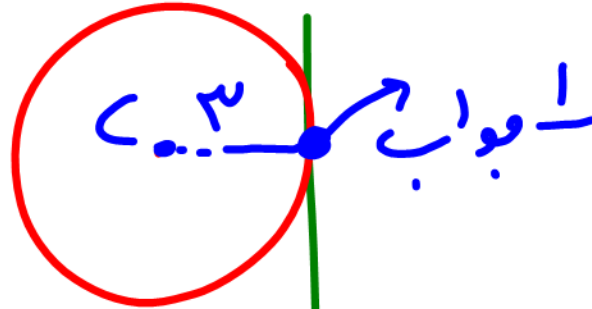


حل تمرینات صفحه ۳۹ کتاب هندسه ۳

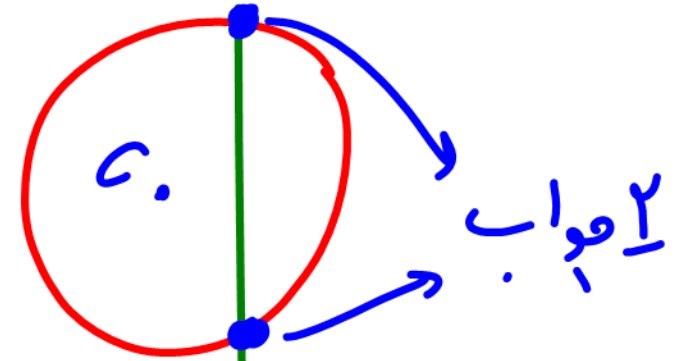
۳- نقاط A, B و C در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).



جواب ندارد



۱- جواب



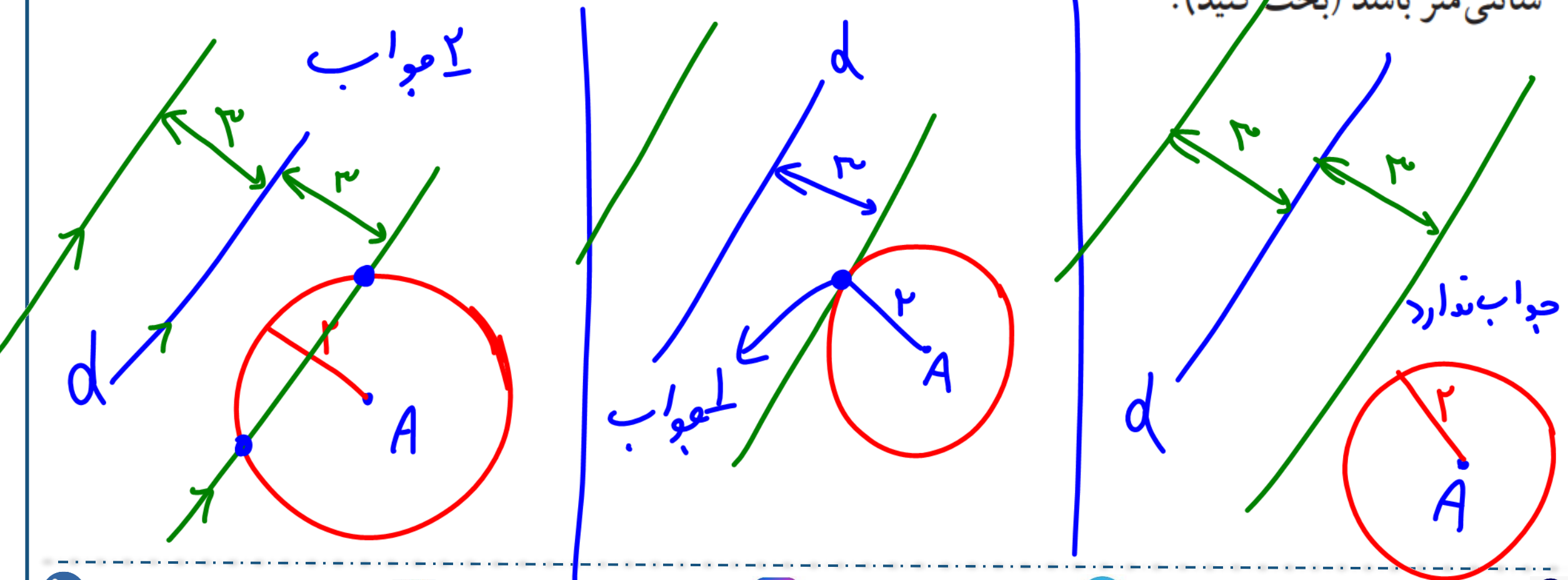
۲- جواب





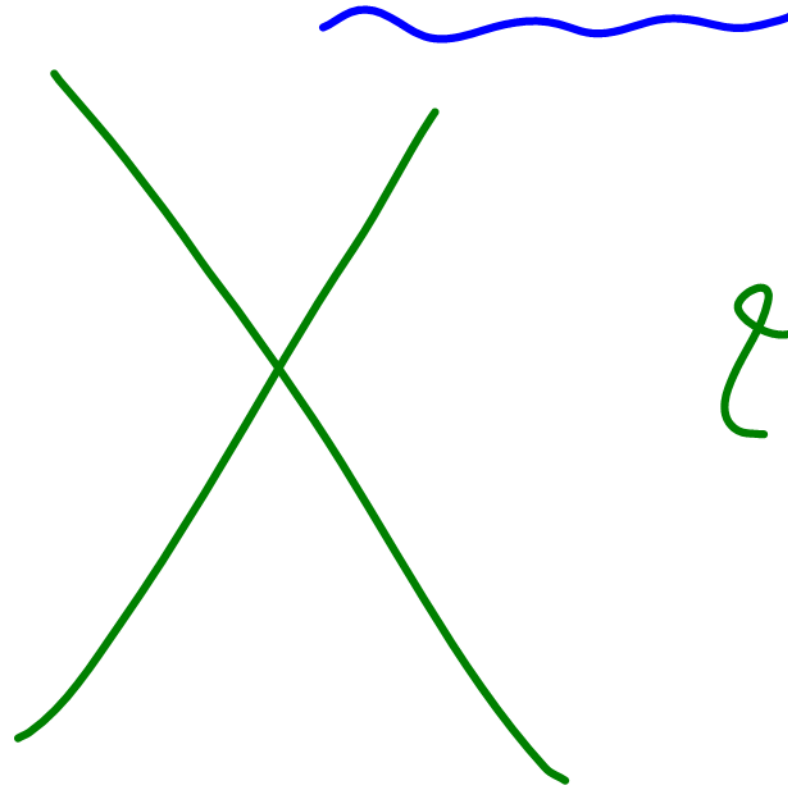
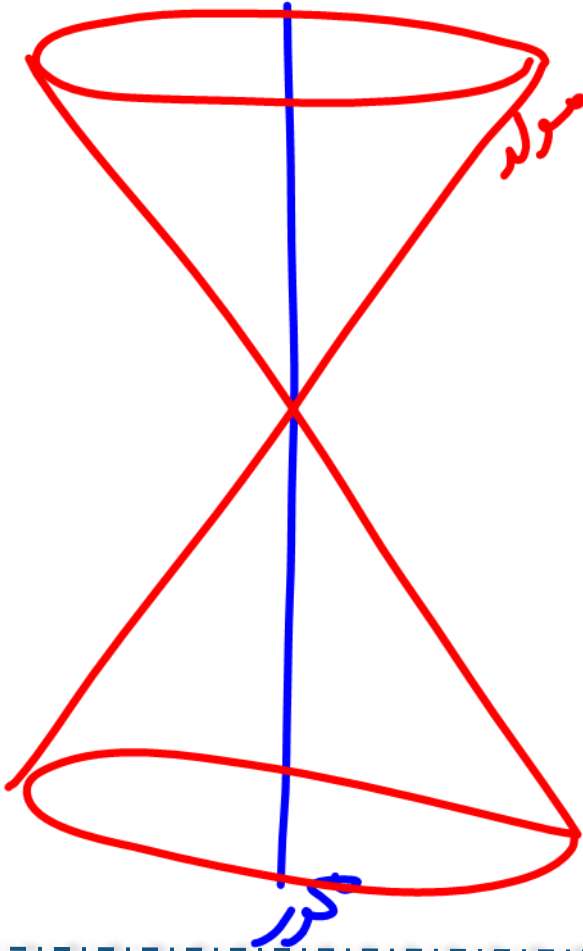
۴- نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی متر و از d به فاصله ۳

سانتی متر باشد (بحث کنید).





۵- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟



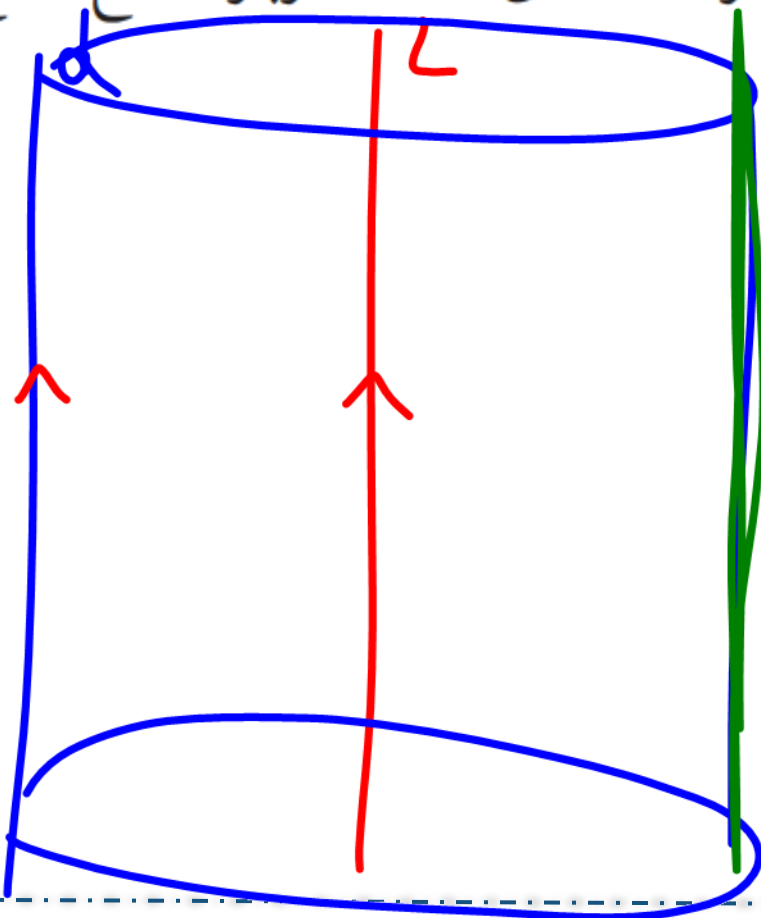
دو خط متقاطع





حل تمرینات صفحه ۳۹ کتاب هندسه ۳

۶- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می شود که آن را یک سطح استوانه ای می نامیم. حال فرض کنید صفحه P ، یک سطح استوانه ای را قطع کند. در حالت های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).



اگر محور محور (L) دایره

مایل به بیضی

موازی با L در فضا موازی

موازی با L ، مماس بر d یک خط



حل تمرینات صفحه ۴۶ کتاب هندسه ۳

۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

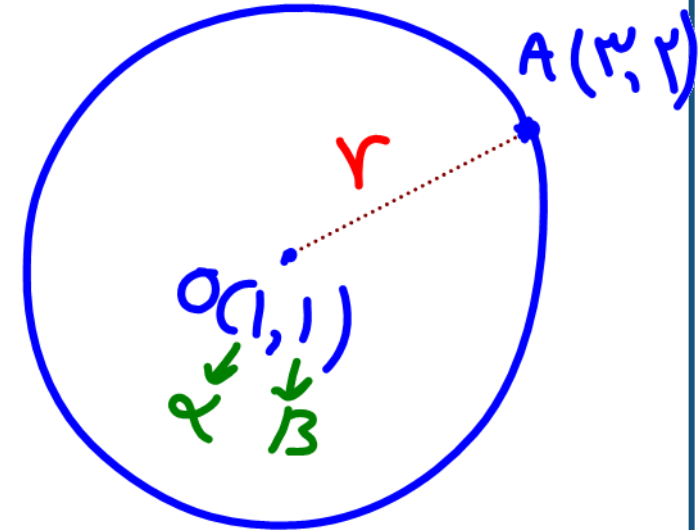
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

مرکز (α, β)

شعاع r

$$r = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}^2 = 5$$



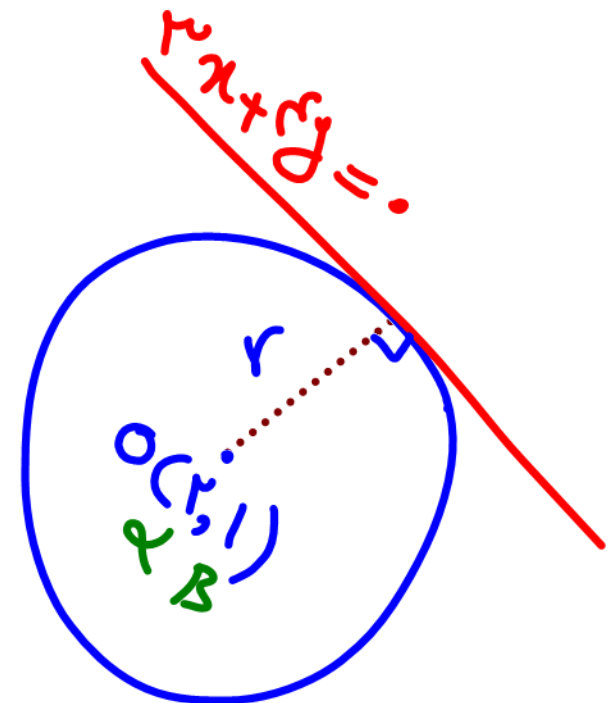


حل تمرینات صفحه ۴۶ کتاب هندسه ۳

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

$$r = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$





پ) $O(-1, -1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وترى به طول ۲ ایجاد کند.

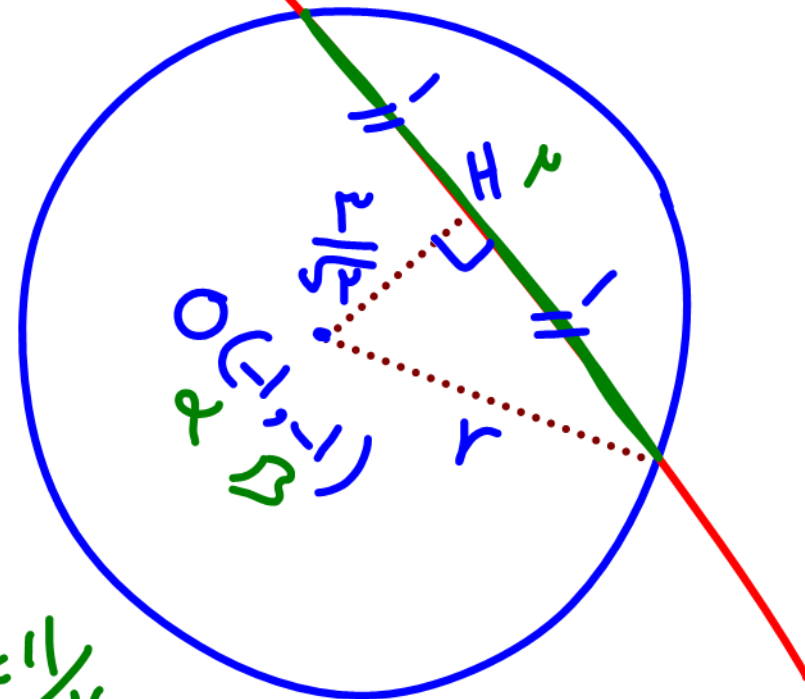
$$OH = \frac{|-1 + (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$x + y - 1 = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 -1 -1

$$r^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 = \frac{9}{2} + \frac{1 \times 2}{1 \times 2} = \frac{11}{2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{11}{2}}$$

$$(x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 = \frac{11}{2} \rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2}$$





$$4x + 3y - 6 = 0$$

حل تمرینات صفحه ۴۶ کتاب هندسه ۳

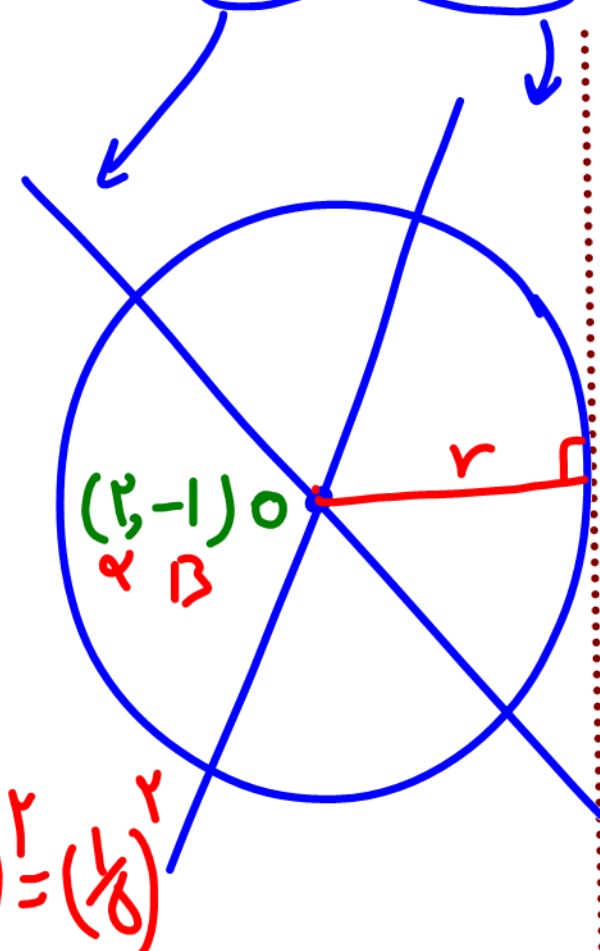
ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \xrightarrow{x=2} \begin{cases} 2+y=1 \\ 2-y=3 \end{cases} \rightarrow y = -2+1 = -1$$

$$\oplus$$

$$2x = 4 \rightarrow x = 2$$

$$r = \frac{|\widehat{4 \times 2 + 3 \times (-1)} - 6|}{\sqrt{\cancel{4^2} + \cancel{3^2}}} = \frac{|-1|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$



$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-(-1))^2 &= \left(\frac{1}{5}\right)^2 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$





$$r = OA = \sqrt{(1-0)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

حل تمرینات صفحه ۴۶ کتاب هندسه ۳

ث) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

$$OA = OB$$

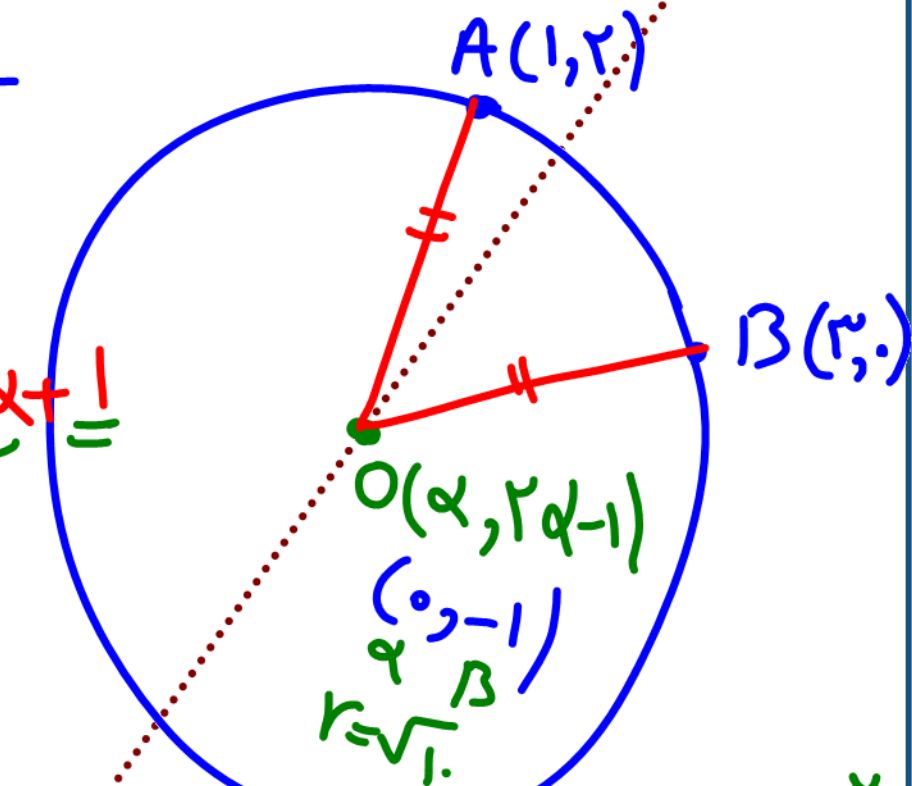
$$\sqrt{(x-1)^2 + (2x-1-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (2x-1-0)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1$$

$$-1^4x + 1 = -1^4x + 1$$

$$-1^4x + 1^4x = 0$$

$$-1^4x = 0 \rightarrow x = 0$$



$$y = 2x - 1$$

$$(x-0)^2 + (y-(-1))^2 = \sqrt{10}^2$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 10$$





۲- حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \\ r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0$$

$$(-3)^2 + 5^2 - 4a > 0 \rightarrow 34 - 4a > 0 \rightarrow -4a > -34$$

$$\div (-4) \rightarrow a < \frac{34}{-4} = \frac{17}{2} \rightarrow a < \frac{17}{2}$$





اولی نوع

حل تمرینات صفحه ۴۶ کتاب هندسه ۳

۳- وضعیت هر یک از نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, -2)$ و $C(2, 3)$ و $D(4, -1)$ را نسبت به دایره

$$O(1, -2)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \quad \text{تعیین کنید.}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(-5)} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 20} = \frac{1}{2} \sqrt{40} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

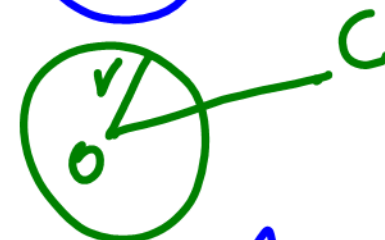
$$OA = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} < r = \sqrt{10} \quad \text{درون دایره}$$



$$OB = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{0 + 0} = \sqrt{0} = 0 \quad \text{نقطه روی مرکز قرار دارد (درون دایره)}$$



$$OC = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} > r \quad \text{بیرون دایره}$$



$$OD = \sqrt{(1 - 4)^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} = r \quad \text{روی دایره}$$





۴- وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2x = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - \underbrace{2x}_a + \underbrace{0y}_b - \underbrace{4}_c = 0$

$O(0,0)$

$r=2$

$O'(1,0)$

$r' = \frac{1}{r} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 4(-4)}$

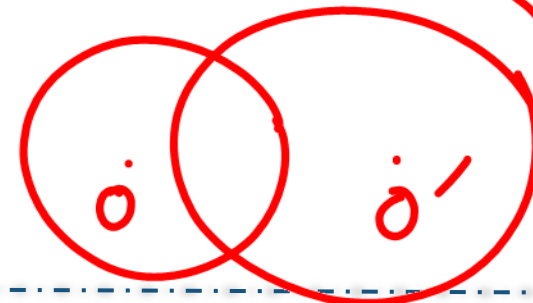
$= \frac{1}{r} \sqrt{20} = \frac{1}{r} \times 2\sqrt{5}$

$= \sqrt{5}$

$d = OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$

$|r-r'| < d < r+r'$

$|2-\sqrt{5}| < 1 < 2+\sqrt{5}$



متقاطع





ب) $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$O(0, 1)$

$r = 1$

$O'(1, 0)$

$r' = 1$

$d = OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|r - r'|$

۰

<

$\sqrt{2}$

< ۲

d

$r + r'$

مقاطع





ج) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - \underbrace{3\sqrt{2}x}_a - \underbrace{3\sqrt{2}y}_b + \underbrace{5}_c = 0$

$O(0,0)$

$O'(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

$r=1$

$r' = \frac{1}{2} \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + (-3\sqrt{2})^2 - 4(5)}$
 $\quad \quad \quad 9 \times 2 \quad \quad \quad 18 + 18 - 20$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{16} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$d = OO' = \sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0)^2 + (\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0)^2}$

$= \sqrt{\frac{9 \times 2}{4} + \frac{9 \times 2}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}}$

$= \sqrt{9} = 3$

$|r - r'| < d = r + r'$

$1 < 3 = 3$





د) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - \underbrace{6x}_{a} - \underbrace{2y}_{b} + \underbrace{9}_{c} = 0$

$O(0,0)$

$O'(3,1)$

$r = 1$

$r' = \frac{1}{r} \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 - 4(9)}$

$= \frac{1}{r} \sqrt{36 + 4 - 36}$

$= \frac{1}{r} \times 2 = 1$

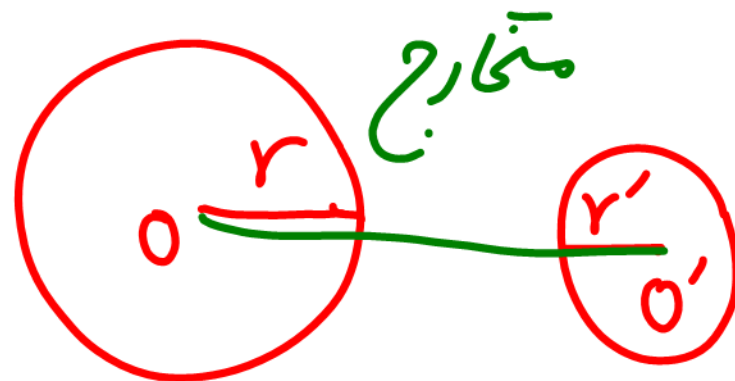
$d = OO' = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$|r - r'|$

۰

$d \quad r + r'$

$\sqrt{10} > 2$



$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{معادلة}$$

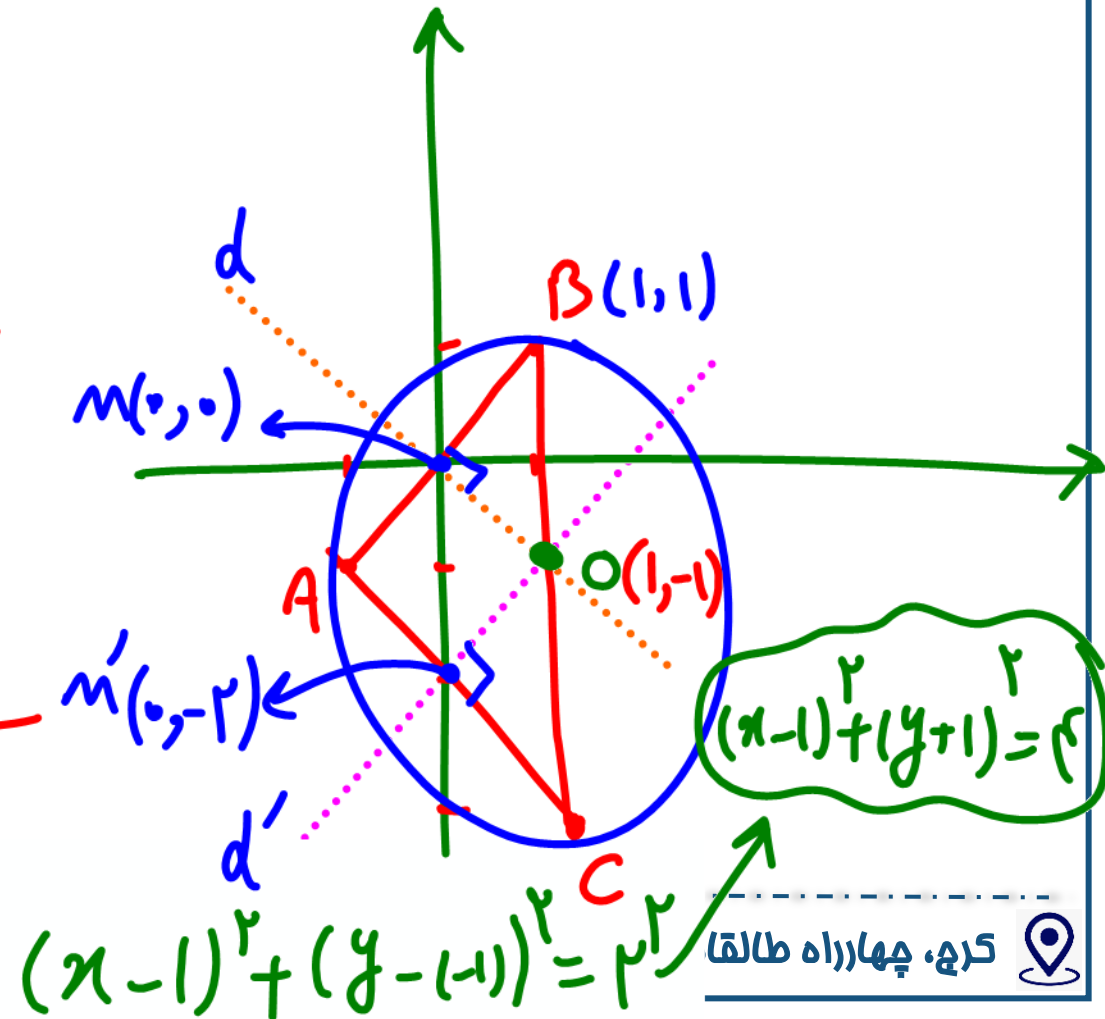
$$y - 0 = -1(x - 0) \rightarrow \boxed{y = -x}$$

$$m_{AC} = \frac{-2(-1)}{1-(-1)} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow m_{d'} = 1$$

$$y - (-2) = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 2$$

$$-x = x - 1 \rightarrow -2x = -1 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -1$$

$$r_{OB} = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{0+4} = 2$$





۶- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x + 4y = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

$$4y = -3x$$

$$y = -\frac{3}{4}x$$

$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x\right)^2 - 4x - 4\left(-\frac{3}{4}x\right) + 7 = 0$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 - 4x + 3x + 7 = 0$$

$$\left(\frac{25}{16}\right)x^2 - 1x + 7 = 0$$

$\begin{matrix} a & b & c \end{matrix}$

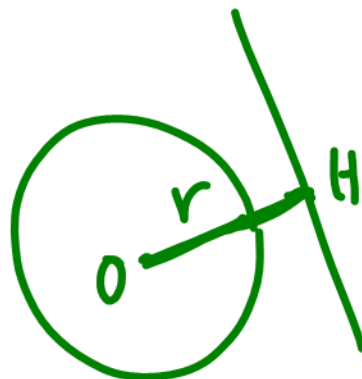
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{25}{16} \times 7 = 1 - \frac{175}{4} < 0$$

حساب ندارد ← خط دایره را متوازی نمی‌اند

$$O(2,2) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{16+16-28} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

$$OH = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{14}{5}$$

$$OH > r$$



$$\frac{14}{5} = OH > r = 1$$



ب) $x+y=2$, $x^2+y^2=2$

$$y = 2 - x$$

$$x^2 + (2-x)^2 = 2$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 = 2$$

$$\underbrace{2x^2}_{a} - \underbrace{4x}_{b} + \underbrace{2}_{c} = 0 \rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2$$

$$= 16 - 16 = 0$$

۱ جواب دارد

خط بردار مماس است





ج) $x+y=1$, $x^2+y^2-2x-2y-2=0$

$\underbrace{\quad}_a \quad \underbrace{\quad}_b \quad \underbrace{\quad}_c$

$$O(1,1)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 - 4(-2)}$$

$4 + 4 + 8$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{16} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

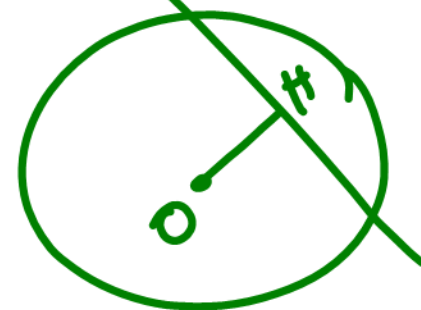
$$x+y-1=0$$

$O(1,1)$

$$OH = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = OH < r = 2$$

خط دایره را قطع می کند.



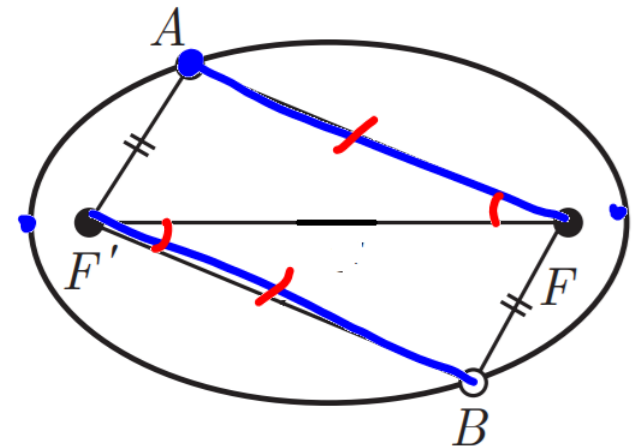


۱- دو نقطه A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:

(الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} AF' + AF = 2a \\ BF' + BF = 2a \end{array} \right\} \rightarrow \cancel{AF} + AF = BF' + \cancel{BF} \\ \rightarrow AF = BF'$$

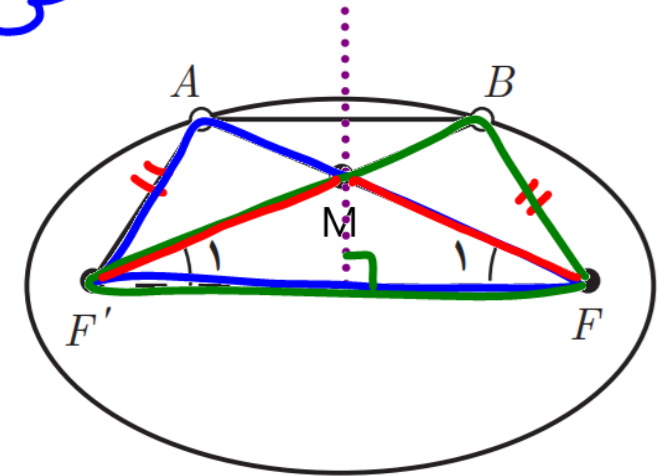
مستواری اضلاع AF و BF' چهارضلعی
 $AF \parallel BF'$





ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

$$\left. \begin{aligned} AF + \cancel{AF'} &= \cancel{BF} + BF' \rightarrow AF = BF' \\ AF' &= BF \\ FF' &\text{ وتر } \end{aligned} \right\} \text{بیضی}$$



$$\triangle AFF' \cong \triangle BFF' \rightarrow \hat{F}'_1 = \hat{F}_1$$

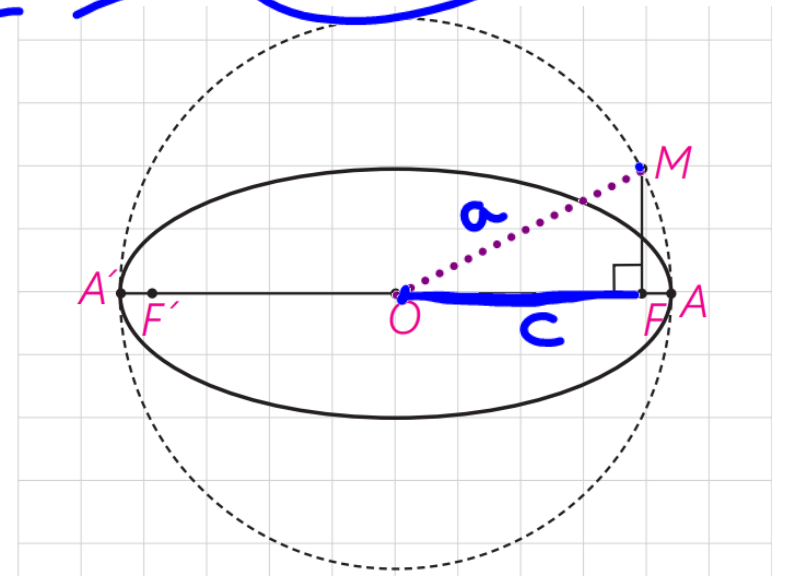
$MF = MF' \leftarrow$ متساوی الساقین
 روی قطر کوچک قرار دارد $\rightarrow$ M روی عمود منصف FF' قرار دارد





۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

$$\left. \begin{aligned} MF^2 + C^2 &= a^2 \rightarrow MF^2 = a^2 - C^2 \\ a^2 &= b^2 + C^2 \rightarrow b^2 = a^2 - C^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow b^2 = MF^2 \rightarrow \boxed{b = MF}$$



$$OM = a$$





حل تمرینات صفحه ۵۷ کتاب هندسه ۳

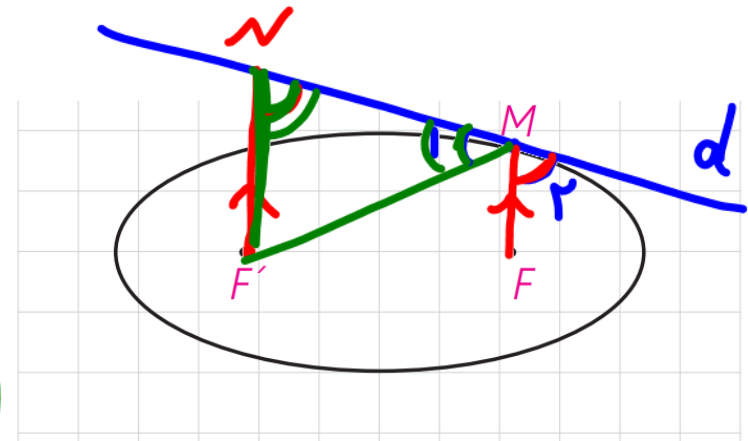
۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند.

ثابت کنید $NF' = MF'$

می‌دانیم که از طرفی $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ①

$\left. \begin{array}{l} NF' \parallel MF \\ \text{خط } d \text{ مماس} \end{array} \right\} \rightarrow \hat{N} = \hat{M}_2$ ②

①, ② $\rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N} \rightarrow \text{مماسی‌ها قیاسی} \rightarrow NF' = MF'$



۴- نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

(ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم الزاویه است.

ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

[illegible]

Diagram illustrating a circle with center O and radius r. Points A, B, and C are on the circumference. The distances from the center O to the points are given: OA = 5, OB = 3, and OF = 4. A blue arc connects A and B, and another blue arc connects B and C. A blue arc also connects A and C. The text "rA = 1.", "rB = 4", and "C = 3" is written below the arcs.

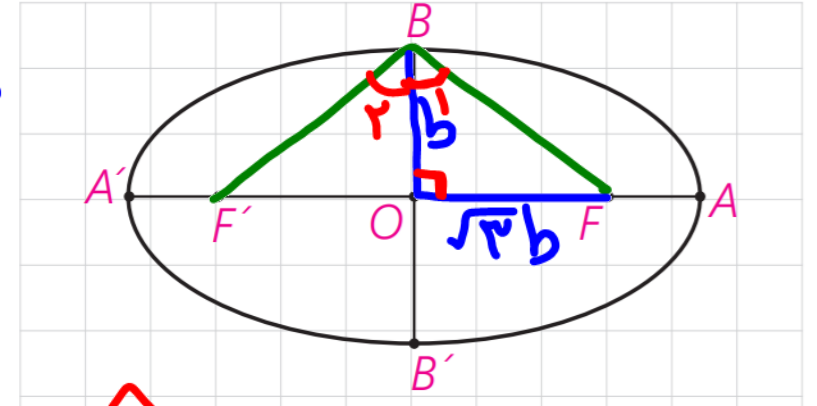
$$\frac{\Gamma}{\mu} \rightarrow MF - 1, MF + 1 \Rightarrow \Delta = 1 \dots - \Gamma = \Gamma \wedge \rightarrow MF = \frac{1 \pm \sqrt{1 \wedge}}{\mu} = 8 \pm \sqrt{V} \rightarrow \begin{cases} MF = 8 + \sqrt{V} \rightarrow MF' = 8 - \sqrt{V} \\ MF = 8 - \sqrt{V} \rightarrow MF' = 8 + \sqrt{V} \end{cases}$$

۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟

$$\gamma a = \gamma(\gamma b) \xrightarrow{\div \gamma} a = \gamma b$$

$$a^r = b^r + c^r \rightarrow c^r = a^r - b^r = (rb)^r - b^r = r b^r - b^r = (r-1)b^r$$

$$\rightarrow c = \sqrt{r-1} b$$



$$\tan \beta_1 = \frac{OF}{BO} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3} \rightarrow \hat{\beta}_1 = 60^\circ = \hat{\beta}_p$$
$$\rightarrow \hat{\beta} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_p = 120^\circ$$



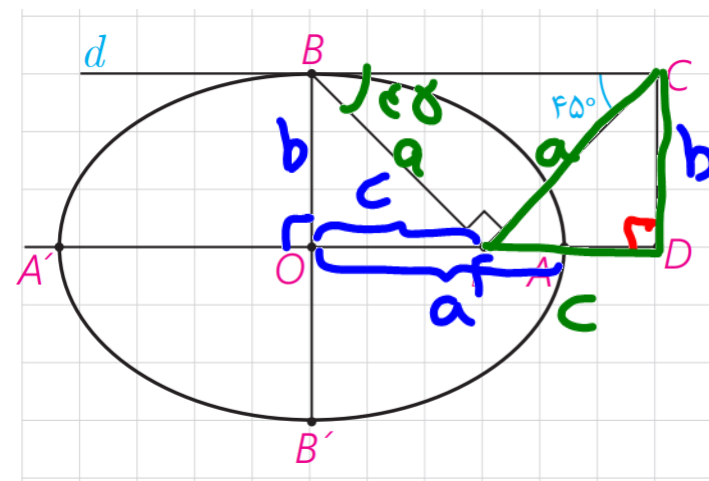
$$a^2 = b^2 + c^2$$

حل تمرینات صفحه ۵۷ کتاب هندسه ۳

۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه ای مانند D قطع کند. اگر $\hat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.

$$AF = a - c$$

$$FD^2 + b^2 = a^2 \rightarrow FD^2 = a^2 - b^2 \rightarrow FD^2 = c^2 \rightarrow FD = c$$



$$AD = FD - AF = c - (a - c) = c - a + c = 2c - a$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{2c - a}{a - c}$$





$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$$

۷- سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات

نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

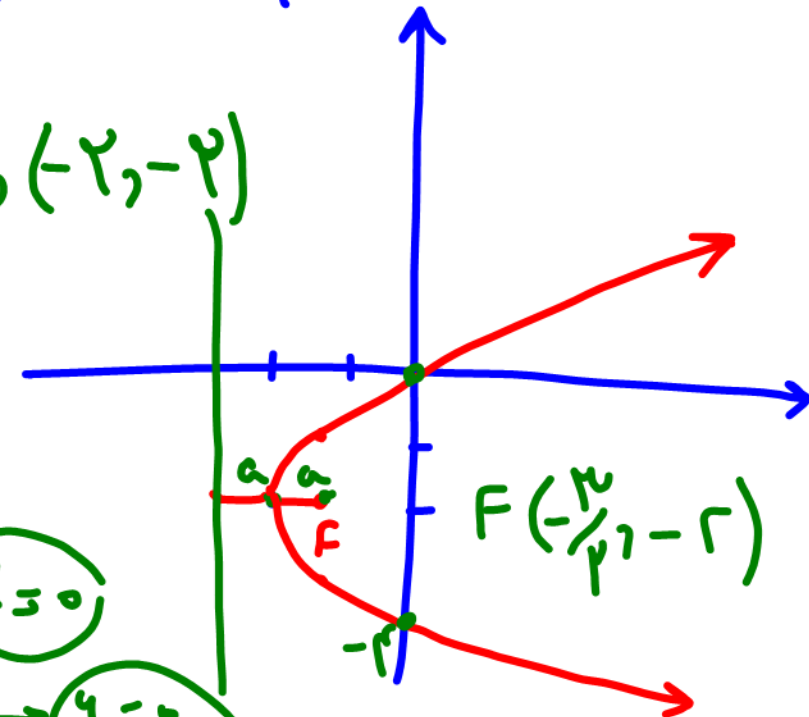
$$y^2 = 2x - 4y \rightarrow y^2 + 4y = 2x \xrightarrow{+4} y^2 + 4y + 4 = 2x + 4$$

$$\rightarrow \underbrace{(y+2)}_{y=-2}^2 = \underbrace{2}_{\text{رأس}} (\underbrace{x+2}_{x=-2}) \rightarrow \text{رأس } (-2, -2)$$

$$4a = 2 \rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y=0 \rightarrow (0+2)^2 = 2(x+2) \Rightarrow 4 = 2(x+2) \rightarrow 2 = x+2 \rightarrow \textcircled{x=0}$$

$$x=0 \rightarrow (y+2)^2 = 2(0+2) \rightarrow (y+2)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} y+2=2 \rightarrow y=0 \\ y+2=-2 \rightarrow y=-4 \end{cases}$$





$$\left(\frac{b}{a} \div 2\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \div a \rightarrow \frac{y}{a} &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \rightarrow \frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x \\ &\quad F\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4}\right) \text{ و } F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4}\right) \text{ رو به پایین} \\ + \frac{b^2}{4a^2} \rightarrow \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)\left(y - c + \frac{b^2}{4a}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + \frac{b}{2a} = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a} \\ y - c + \frac{b^2}{4a} = 0 \rightarrow y = c - \frac{b^2}{4a} \end{cases}$$

$$4a = \frac{1}{a} \rightarrow 4a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

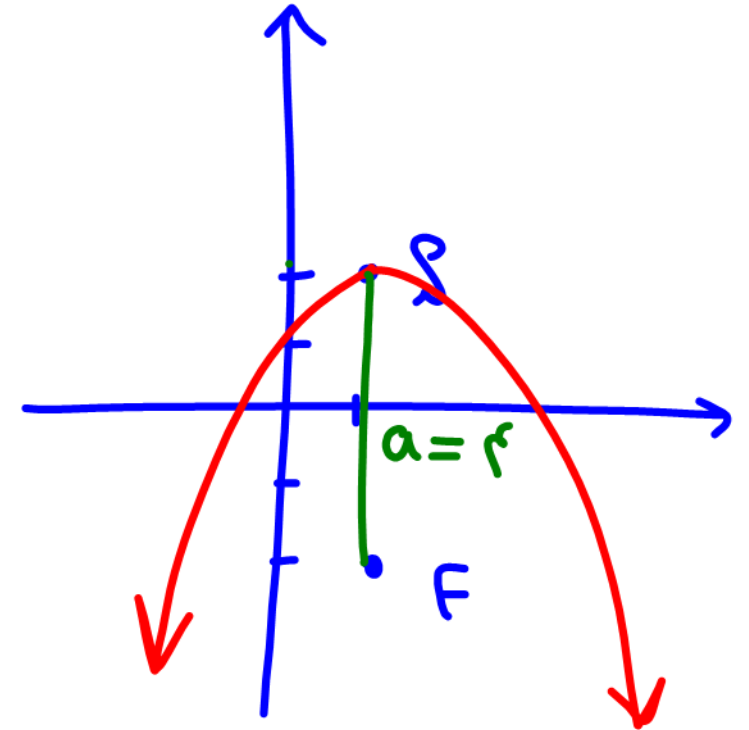


حل تمرینات صفحه ۵۷ کتاب هندسه ۳

۹- معادله سهمی را بنویسید که رأس $S(1, 2)$ و $F(1, -2)$ کانون آن باشد.

$$(x-1)^2 = -4a(y-2)$$

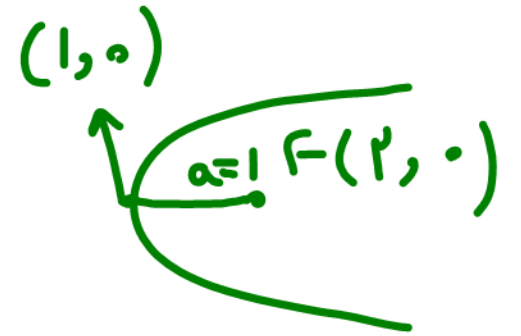
$$(x-1)^2 = -16(y-2)$$





۱۰- سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$$y^2 = 4(x-1) \rightarrow \text{رأس } (1, 0) \left. \begin{array}{l} \\ 4a = 4 \rightarrow a = 1 \end{array} \right\} \rightarrow F(2, 0)$$



$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 9 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9$$

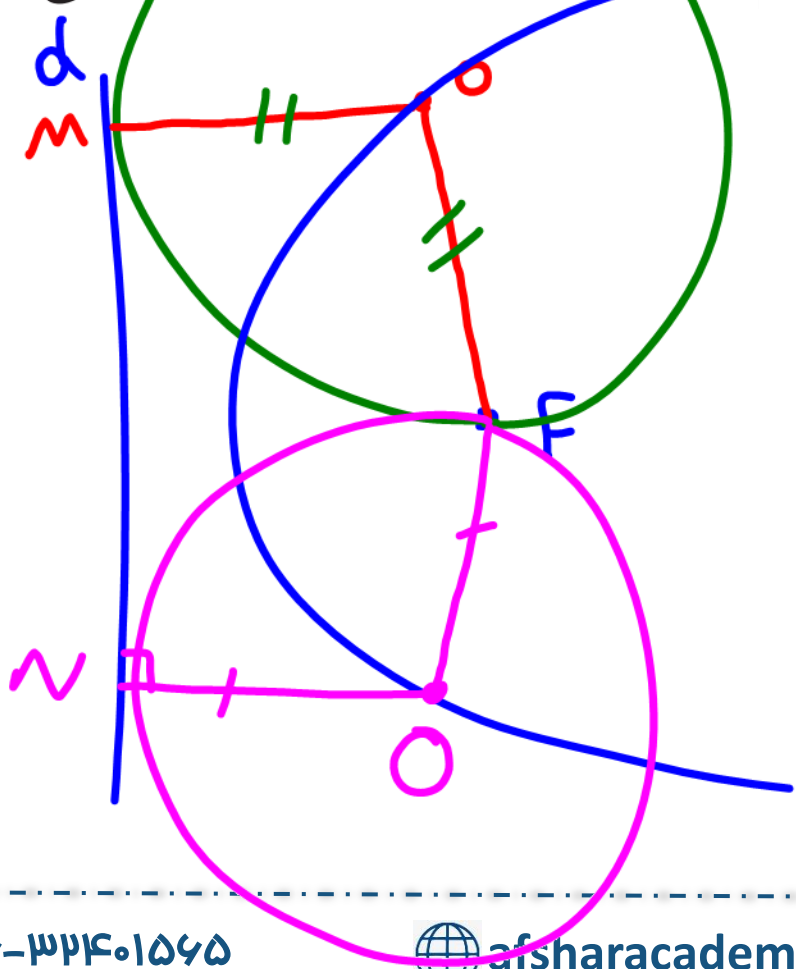
$$\left. \begin{array}{l} y^2 = -x^2 + 4x + 8 \quad \text{دایره} \\ y^2 = 4x - 4 \quad \text{سهمی} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} -x^2 + 4x + 8 = 4x - 4 \rightarrow -x^2 = -9 \rightarrow x^2 = 9 \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \rightarrow y^2 = 8 \rightarrow y = \pm\sqrt{8} \\ x = -3 \rightarrow y^2 = -16 \end{array} \right. \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (3, \sqrt{8}) \\ (3, -\sqrt{8}) \end{array} \right.$$

جواب ندارد



حل تمرینات صفحه ۵۷ کتاب هندسه ۳

۱۱- سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع



مقاطع دایره $O F = O M$
 پس بنا بر تقریب سهمی صحت
 دارد بر روی سهمی قرار دارد

تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.
 فرض کنیم O نقطه ای روی
 سهمی باشد. پس فاصله
 آن از F ، فاصله O از خط d است
 حال گمانی است دایره ای به مرکز
 O به تقاطع $O F$ رسم کنیم حتماً بر خط d نیز مماس می شود





حل تمرینات صفحه ۵۷ کتاب هندسه ۳

۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M ، MT را بر d عمود کرده ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$

تالس $\Rightarrow \frac{NT}{TH} = \frac{MN}{MF}$

جزء به کل $\frac{MF}{MT} = \frac{MN}{FN} \rightarrow \frac{FN}{FH} = \frac{MN}{MF}$

$\frac{NT}{TH} = \frac{FN}{FH}$

$\frac{2NT}{TH} = \frac{FN}{FA}$

$MT = MF$
 $FH = 2FA$





۱۳- یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخبراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

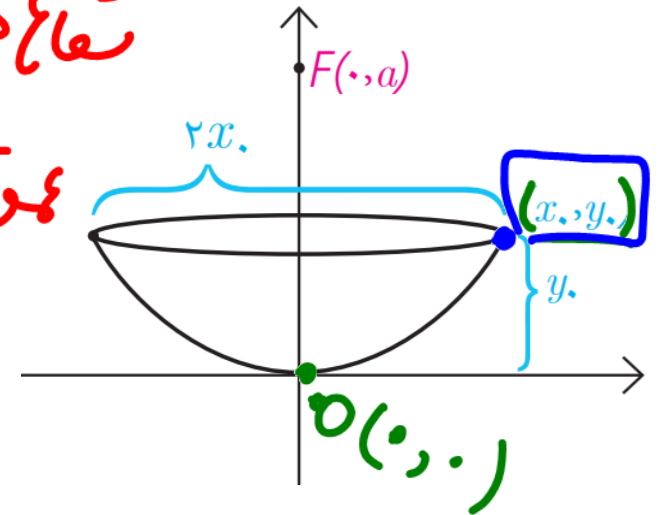
$$a = \frac{d \times d}{16h} = \frac{d^2}{16h} = \frac{(2x.)^2}{16y.} = \frac{4x.^2}{16y.} = \frac{x.^2}{4y.}$$

رعا دهانه دیش $x.$ عمق $y.$

$$(x - 0)^2 = +4a(y - 0) \rightarrow x^2 = 4ay$$

$$\xrightarrow{(x., y.)} x.^2 = 4ay. \div 4y. \rightarrow a = \frac{x.^2}{4y.}$$

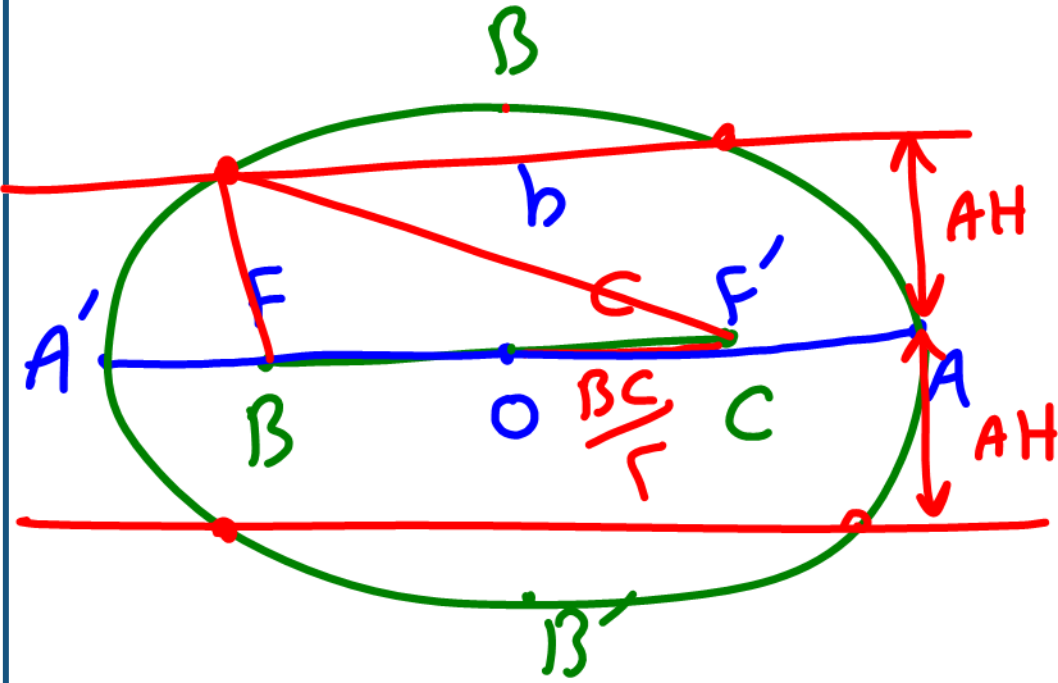
نقطه ای از سهمی



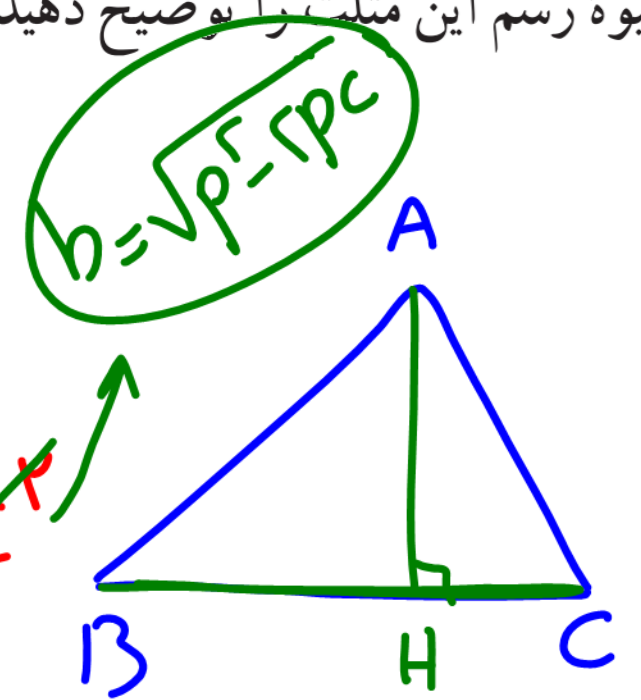


حل تمرینات صفحه ۵۷ کتاب هندسه ۳

۱۴- فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 \\ b^2 &= (p - c)^2 - c^2 \\ b^2 &= p^2 - 2pc + c^2 - c^2 \end{aligned}$$



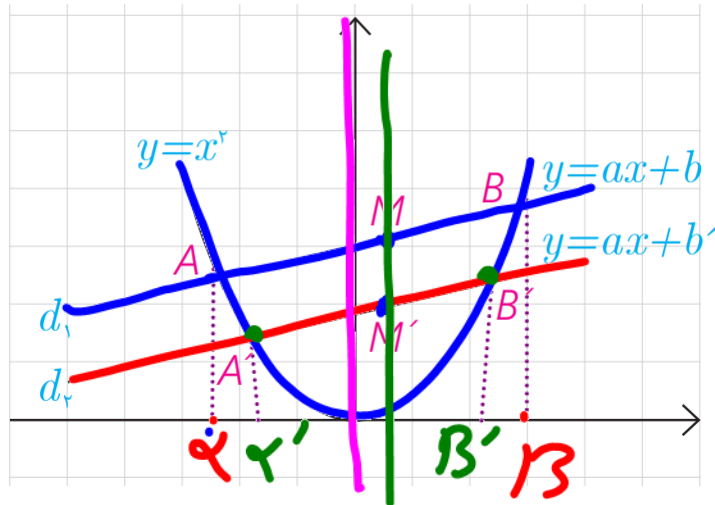
$$\begin{aligned} AB + AC + BC &= 2p \rightarrow 2a = 2p - BC \\ \div 2 &\rightarrow a = p - \frac{BC}{2} \rightarrow a = p - c \end{aligned}$$

۱- می‌توانی مکان رسم کرد $AH < b$ | دو می‌توانی بتوان $AH = b$ | جواب ندارد $AH > b$



۱۵- سهمی $y = x^2$ و دو خط موازی $d_1: y = ax + b$ و $d_2: y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^2$ باشد.



$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = ax + b \end{array} \right\} \rightarrow x^2 = ax + b \rightarrow x^2 - ax - b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = -\frac{-a}{1} = a \\ \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = -b \end{array} \right. \quad \alpha, \beta \text{ ریشه های معادله}$$

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد،

$$y_A = a\alpha + b \quad y_B = a\beta + b \quad \text{مختصات نقطه } M \text{ را به دست آورید.}$$

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{a}{2} \\ \frac{a\alpha + b + a\beta + b}{2} = \frac{a(\alpha + \beta) + 2b}{2} = \frac{a^2 + 2b}{2} \end{array} \right.$$



حل تمرینات صفحه ۵۷ کتاب هندسه ۳

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_1 به جای d_2 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره خط

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b' \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 = ax + b' \rightarrow x^2 - ax - b' = 0 \rightarrow \alpha', \beta' \text{ را به دست آورید.}$$

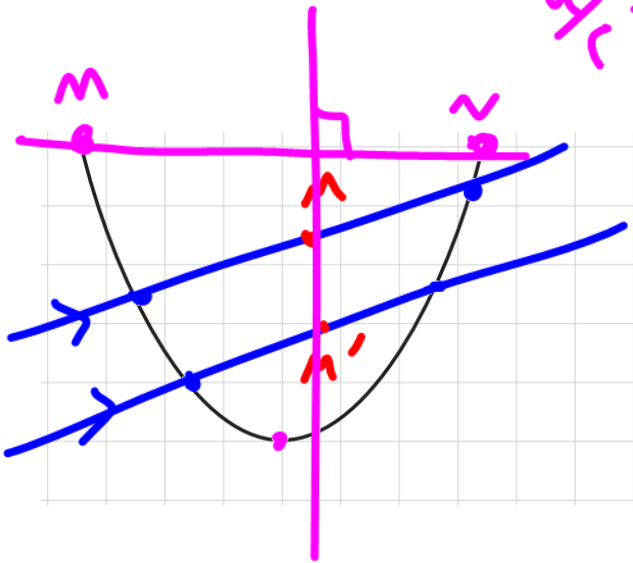
$$\alpha' + \beta' = -\frac{(-a)}{1} = a$$

$$M' = \begin{cases} \frac{\alpha' + \beta'}{2} = \frac{a}{2} \\ \frac{a\alpha' + b' + a\beta' + b'}{2} = \frac{a(\alpha' + \beta') + 2b'}{2} = \frac{a^2 + 2b'}{2} \end{cases}$$

ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

$$k = \frac{y_M - y_{M'}}{x_M - x_{M'}} = \frac{y_M - y_{M'}}{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{0}{0} \text{ بیاب}$$

موازی محور تقارن می‌باشد



ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



$$A = (2, 1, 3)$$

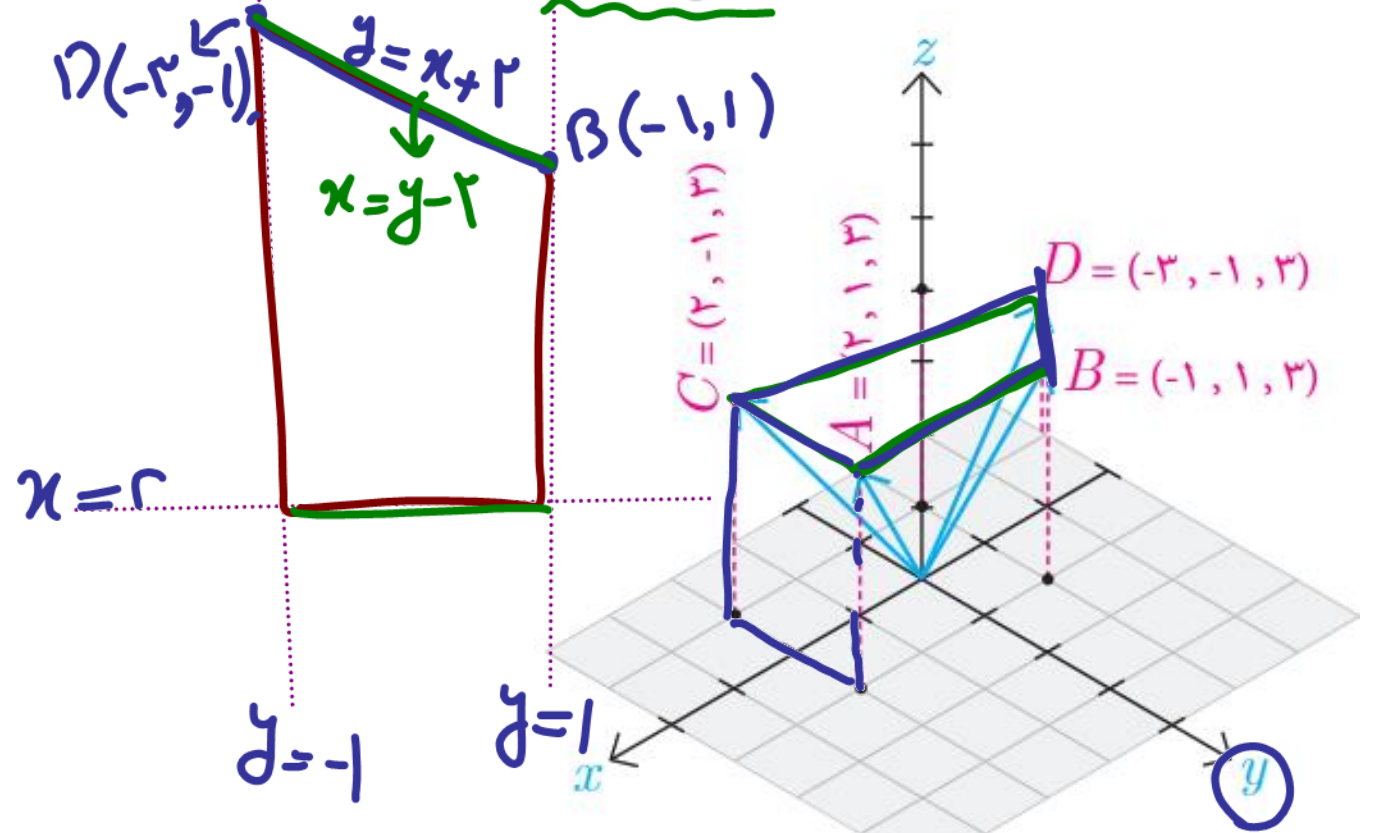
$$C = (2, -1, 3)$$

$$B = (-1, 1, 3)$$

$$D = (-3, -1, 3)$$

حل تمرینات صفحه ۷۶ کتاب هندسه ۳

۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند.
الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهار ضلعی $ABCD$ را بنویسید.



$$y-2 \leq x \leq 2$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

$$z = 3$$

$$a = \frac{-1-1}{-3-(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y = ax + b \rightarrow y = x + b$$

$$1 = -1 + b \rightarrow b = 2$$



@afsharacademy



۰۹۱۲۵۱۰۱۶۷۱

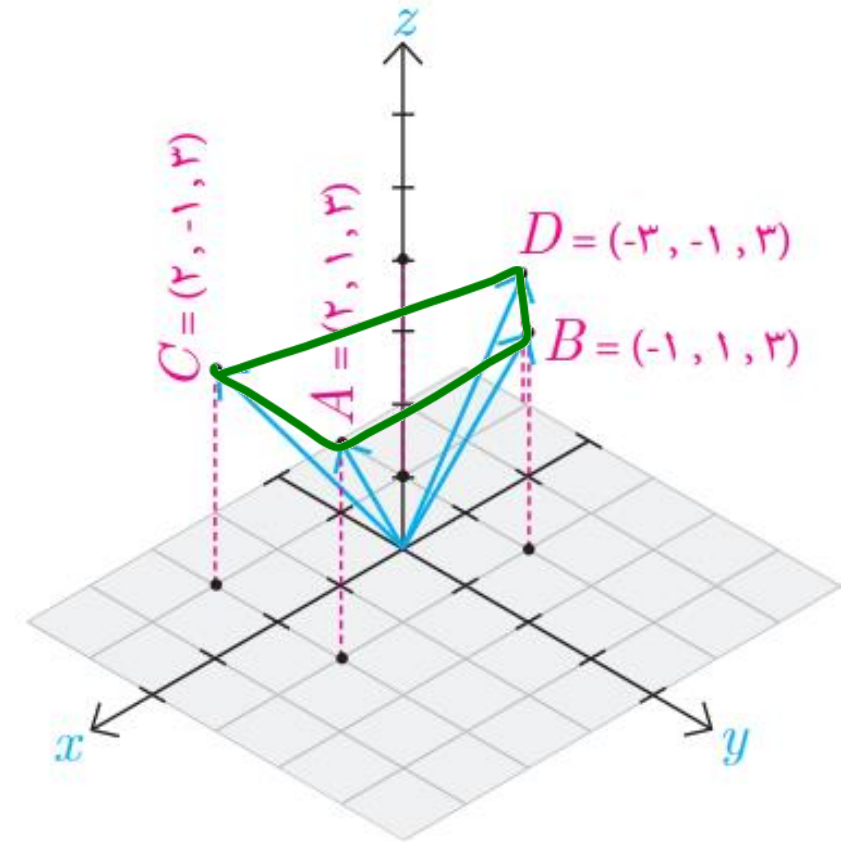
کره، چهارراه طالقانی،





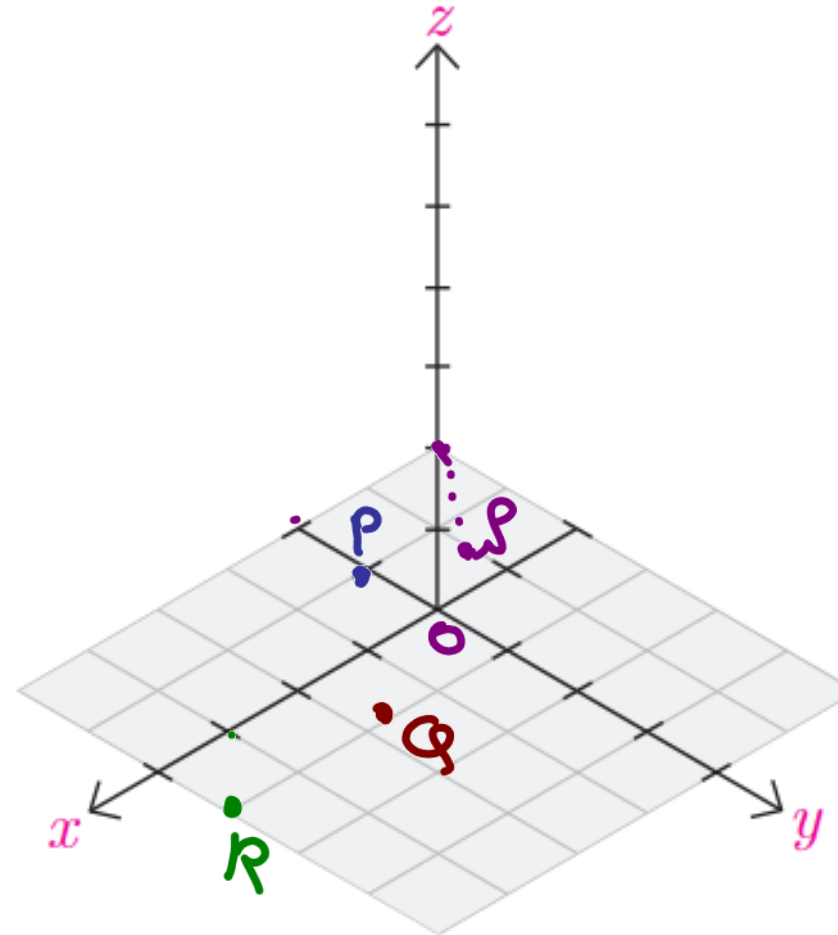
ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.

$$\begin{cases} y-2 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 1 \leq -1 \leq 4 \end{cases}$$





۲- نقاط با مختصات $P=(1,0,1)$ ، $Q=(0,-1,-2)$ ، $R=(3,0,-1)$ و $S=(-2,-2,-2)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.





$$P = (1, 0, 1)$$

$$R = (3, 0, -1)$$

$$Q = (0, -1, -2)$$

$$S = (-2, -2, -2)$$

۳- در سؤال قبل طول پاره خط‌های PQ، RQ و PS را بیابید.

$$PQ = \sqrt{(1-0)^2 + (0-(-1))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

$$RQ = \sqrt{(3-0)^2 + (0-(-1))^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

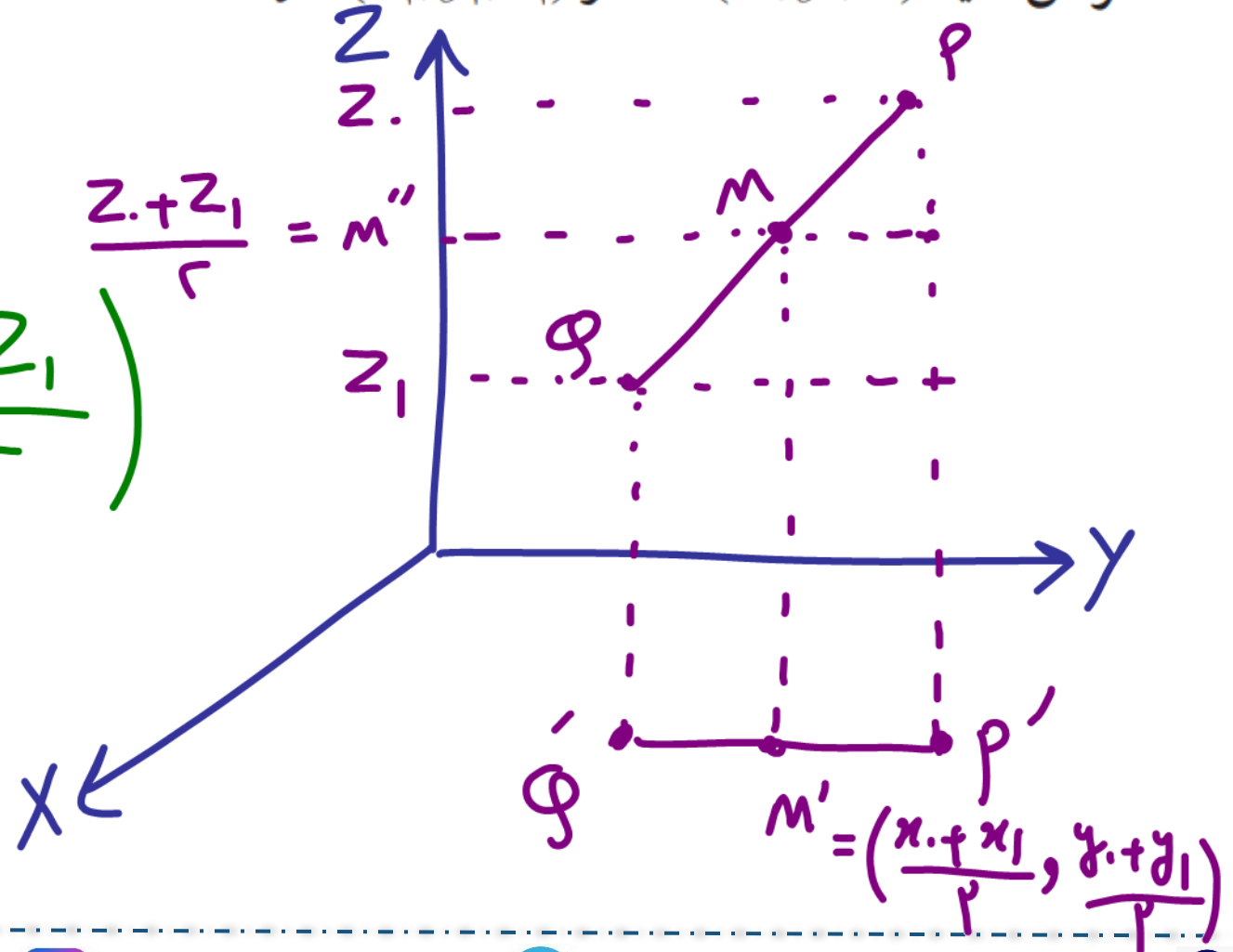
$$PS = \sqrt{(1-(-2))^2 + (0-(-2))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$





۴- فرض کنید $P = (x_0, y_0, z_0)$ و $Q = (x_1, y_1, z_1)$. مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را بیابید.

$$M \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2} \right)$$





۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a} = (-\frac{1}{3}, 0, 2)$ ، $\vec{b} = (\sqrt{2}, 1, 1)$ ، $r = 3$ ، $\underline{r\vec{a} - \vec{b}} = ?$

$$(-1, 0, 6) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (-1 - \sqrt{2}, -1, 5)$$

ب) $\vec{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ ، $\vec{b} = (3, 1, -1)$ ، $r = -1$ ، $\underline{r\vec{a} + \vec{b}} = ?$

$$(-3, -2, 1) + (3, 1, -1) = (0, -1, 0)$$





$$\vec{a} + \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{k} \quad (ج)$$

$$= (0, 3, 1) \quad (\sqrt{2}, 0, -1)$$

$$(\sqrt{2}, 0, -1) + (0, 3, 1) = (\sqrt{2}, 3, 0)$$

$$r\vec{a} + \vec{b} = ? \quad , \quad r = \frac{1}{5} \quad , \quad \vec{b} = -\vec{k} + \vec{i} \quad , \quad \vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j} \quad (د)$$

$$(1, 0, -1) \quad = (0, 1, 5)$$

$$(0, \frac{1}{5}, 1) + (1, 0, -1) = (1, \frac{1}{5}, 0)$$





۶- طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 0 + 4} = \sqrt{\frac{37}{9}} = \frac{\sqrt{37}}{3} \quad \vec{a} = (-\frac{1}{3}, 0, 2) \quad \text{(الف)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14} \quad \vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad \text{(ب)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2 + 0 + 1} = \sqrt{3} \quad \vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{k} \quad \text{(ج)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 1 + 25} = \sqrt{26} \quad \vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j} \quad \text{(د)}$$



۱- برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

$$a'_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{2}{1} (1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

الف) $\vec{b} = i, \vec{a} = (2, -1, 2)$

$\vec{b} = i \rightarrow \text{مولفه اول}$
 $\vec{a} = (2, -1, 2) \rightarrow \text{در } i, j, k$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 2) \cdot (1, 0, 0) = 2 + 0 + 0 = 2$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$





حل تمرینات صفحه ۸۴ کتاب هندسه ۳

ب) $\vec{b} = (3, 2, 1)$ ، $\vec{a} = (2, 3, 1)$

$$a \cdot b = 6 + 6 + 1 = 13$$

$$|\vec{b}|^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 9 + 4 + 1 = 14$$

$$a'_b = \frac{13}{14} (3, 2, 1) = \left(\frac{39}{14}, \frac{26}{14}, \frac{13}{14} \right)$$





حل تمرینات صفحه ۸۴ کتاب هندسه ۳

پ) $\vec{b} = (-1, 2, 4)$ ، $\vec{a} = (1, 1, 0)$

$$a \cdot b = -1 + 2 + 0 = 1$$

$$|\vec{b}|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 4^2 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$a'_b = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot (-1, 2, 4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$





$$|x|^2 = x \cdot x$$

حل تمرینات صفحه ۸۴ کتاب هندسه ۳

۲- فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.

$$|a|=2 \quad |b|=1 \quad |c|=3$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{0}|^2 \rightarrow (a+b+c) \cdot (a+b+c) = 0$$

$$\underline{a \cdot a} + \underline{a \cdot b} + \underline{a \cdot c} + \underline{b \cdot a} + \underline{b \cdot b} + \underline{b \cdot c} + \underline{c \cdot a} + \underline{c \cdot b} + \underline{c \cdot c} = 0$$

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c = 0$$

$$\underline{4 + 1 + 9} + 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 0 \rightarrow \underline{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -2}$$





۳- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{i} = (1, 0, 0) \\ \vec{b} &= \vec{j} = (0, 1, 0) \\ \vec{c} &= \vec{k} = (0, 0, 1) \end{aligned} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = \vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{b} \neq \vec{c}$$



۴- اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$ و $\vec{b} = (3, -4, 2)$ ، $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

$$\vec{K} = \vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{K} = (1, -3, 4) \cdot (2, -3, 6) = 2 + 9 + 24 = 35$$

$$a'_K = \frac{\vec{a} \cdot \vec{K}}{|\vec{K}|^2} \times \vec{K} = \frac{35}{49} (2, -3, 6) = \left(\frac{10}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{30}{7} \right)$$

$$|\vec{K}|^2 = 2^2 + (-3)^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36$$



۵- برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ پیدا کنید.

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (15 - 2)\vec{i} - (-5 - (-10))\vec{j} + (1 - 6)\vec{k} \\ &= 13\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} \\ &= (13, 5, -5)\end{aligned}$$



$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \theta$$

۶- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

$$\vec{a} = (1, 1, 1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{b} = (2, 2, 2) \quad \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \rightarrow \vec{b} \neq \vec{c}$$

در حالت کلی همواره برقرار نیست

$$\vec{c} = (3, 3, 3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$

$$|a||b-c|\sin \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} |a| \neq 0 \rightarrow \text{غیر صفر} \\ \sin \theta \neq 0 \rightarrow a \nparallel b-c \end{cases} \rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$



$$a \cdot b = |a| \times |b| \times \cos \theta$$

حل تمرینات صفحه ۸۴ کتاب هندسه ۳

۷- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند به طوری که $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

$$|a| \times |b| \times \sin \theta = 72 \rightarrow \underbrace{3 \times 26}_{\sqrt{8}} \times \sin \theta = 72 \rightarrow \sin \theta = \frac{72}{\sqrt{8}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{13}$$

$$a \cdot b = 3 \times \cancel{26}^2 \times \left(\pm \frac{5}{\cancel{13}} \right) = \pm 30$$



۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3, 5, 7)$, $B = (5, 5, 0)$, $C = (-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (5, 5, 0) - (3, 5, 7) = (2, 0, -7)$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (-4, 0, 4) - (3, 5, 7) = (-7, -5, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -7 \\ -7 & -5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (0 - 35)\vec{i} - (-4 - 49)\vec{j} + (-10 - 0)\vec{k}$$

$$= -35\vec{i} + 53\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-35)^2 + 53^2 + (-10)^2} = \sqrt{1225 + 2809 + 100} = \sqrt{4134}$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{5}{2} \sqrt{174}$$

